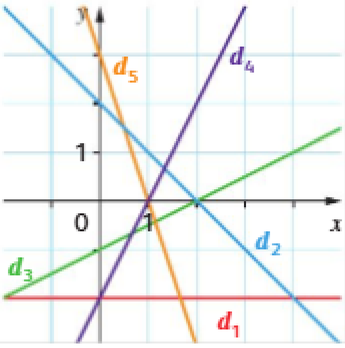
I-Pour bien commencer

Coefficient directeur d'une droite

On donne ci-contre cinq droites, dont les coefficients directeurs sont, dans l'ordre croissant : -3 ; -1 ; 0 ; $\frac{1}{2}$; 2.

1. Attribuer à chaque droite son coefficient directeur.

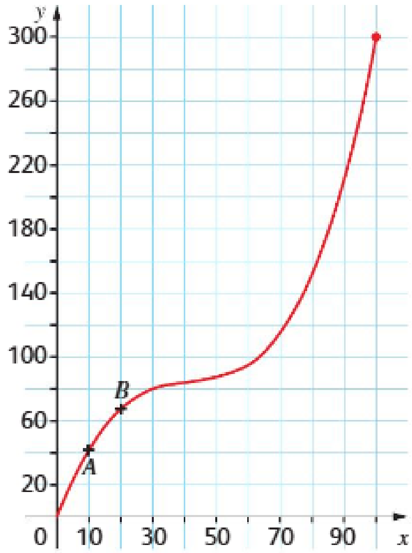
2. Préciser l'ordonnée à l'origine de chaque droite



Situation 2 Vitesse instantanée

Objectif
Découvrir la notion de nombre dérivé.

Éléonore effectue une course à pied de 300 mètres. Le relevé de la distance qu'elle parcourt, en mètre, en fonction du temps, en seconde, est donné par la fonction f définie sur $[0 ; 100]$ par $f(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}125x^2 + 5{,}5x$ dont on donne la représentation graphique ci-contre.
On note A et B les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 10 et 20.



1 **a.** Quelle distance Éléonore a-t-elle parcourue au bout de $t_0 = 10$ secondes ? au bout de $t_1 = 20$ secondes ?
b. Calculer sa vitesse moyenne entre t_0 et t_1.

Rappel - Vocabulaire

vitesse moyenne $= \dfrac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}}$

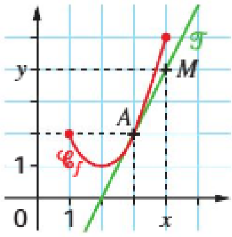
La vitesse moyenne entre les instants t_0 et t_1 est égale au coefficient directeur de la droite (AB). Cette droite est appelée **droite sécante** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A et en B.

2 Éléonore veut connaître sa vitesse « instantanée » après 10 secondes, c'est-à-dire exactement 10 secondes après le départ.
a. Calculer sa vitesse moyenne entre t_0 et $t_2 = 10{,}1$ secondes, puis sa vitesse moyenne entre t_0 et $t_3 = 10{,}01$ secondes et enfin sa vitesse moyenne entre t_0 et $t_4 = 10{,}001$ secondes.
b. Vers quelle valeur ces vitesses semblent-elles se rapprocher ? En déduire la vitesse instantanée au bout de 10 secondes. Ce nombre s'appelle le nombre dérivé de la fonction f en 10, on le note $f'(10)$.

Situation 3 Tangente à une courbe en un point

Objectif
Obtenir l'équation réduite d'une tangente.

On considère une fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-contre. La tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a passe par le point $M(x\,;y)$.



1 Un cas particulier

a. Sur le graphique ci-contre, lire les valeurs de $a\,;f(a)\,;x$ et y.

b. Calculer le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ et en déduire la valeur de $f'(a)$.

c. $\mathcal{T}$ a pour équation réduite $y=f'(a)x+p$ où p est un nombre réel à déterminer. À l'aide des coordonnées du point M, montrer que l'équation réduite de $\mathcal{T}$ est $y=2x-4$.

Info
La droite $\mathcal{T}$ a pour coefficient directeur $\dfrac{y-f(a)}{x-a}$.

2 Cas général

On considère un nombre réel a et on suppose que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente $\mathcal{T}$ au point A d'abscisse a. On cherche à déterminer l'équation réduite de $\mathcal{T}$.

a. Soit $M(x\,;y)$ un point appartenant à $\mathcal{T}$ distinct de A. Montrer que :

$$f'(a)=\frac{y-f(a)}{x-a}$$

b. En déduire que l'équation réduite de $\mathcal{T}$ est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

✂--

II-Synthèse de cours et exercices

Nombre dérivé

a Sécante à une courbe

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et on note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère du plan.
Pour tout nombre réel a de l'intervalle I, on appelle A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.

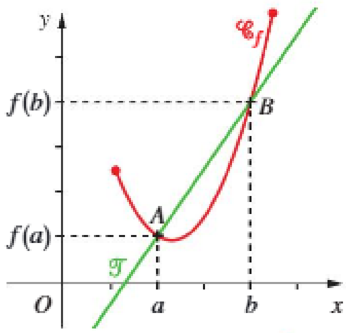
Définition

Pour tout nombre réel b de l'intervalle I distinct de a, on note B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse b. La droite (AB) est appelée **droite sécante** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A et en B.

Remarque

Le coefficient directeur de la sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A et B est égal à $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, il est égal au **taux d'accroissement de f entre a et b**.

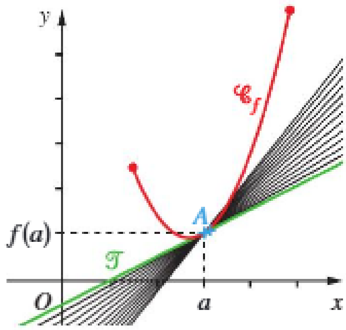
Voir Thème 4 : Modélisation continue - Croissance linéaire



b Tangente à une courbe

Définition

Lorsque le point B se rapproche du point A, la droite sécante (AB) tend vers une position limite appelée **tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a**.



Ci-dessus, la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse a.

♥♥♥♥

C Nombre dérivé

Définition

Lorsque la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse a, on dit que la fonction f est **dérivable en a**.

Le coefficient directeur de $\mathscr{T}$, noté $f'(a)$, est appelé le **nombre dérivé de f en a**.

Remarques

• La calculatrice permet de déterminer, dans certains cas, une valeur approchée du nombre dérivé.

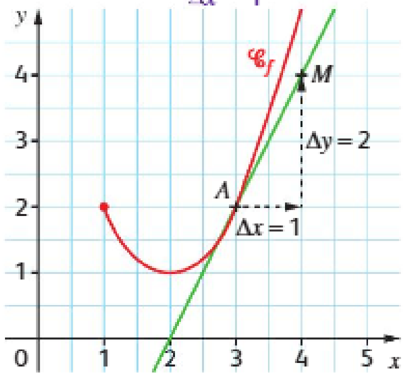
Voir méthode ci-contre

• Le nombre dérivé d'une fonction f en a correspond à la **valeur** vers laquelle se rapproche le taux d'accroissement $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ de f entre a et b **lorsque b se rapproche de a**.

Exemple

On donne la courbe d'une fonction f et sa tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 3. Le nombre dérivé de f en 3 est égal au coefficient directeur de $\mathscr{T}$:

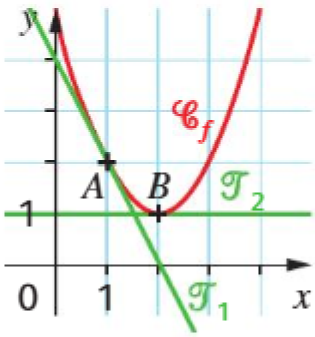
$$f'(3)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2}{1}=2$$



Exercice I

12 On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f, ainsi que ses tangentes aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 2.

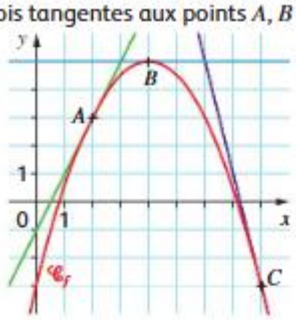
1. Déterminer par lecture graphique les valeurs de $f'(1)$ et $f'(2)$.



✂--

Exercice II

28 On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f ainsi que trois tangentes aux points A, B et C.

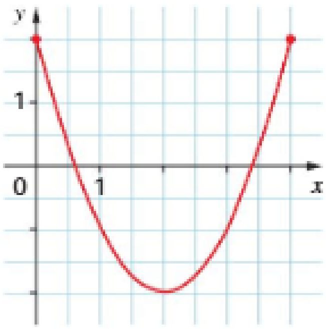


Lire les nombres dérivés $f'(2)$, $f'(4)$ et $f'(8)$.

✂--

Exercice III

42 On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$.



1. La fonction f semble-t-elle être dérivable en tout point de $]0\,;4[$?

2. Déterminer le réel a tel que $f'(a)=0$.

3. Ordonner dans l'ordre croissant les nombres : $f'(0)$; $f'(1)$; $f'(2)$; $f'(3)$; $f'(4)$.

4. Quelles sont les valeurs de x qui semblent vérifier $f'(x) < 0$?

Équation d'une tangente

a Équation réduite d'une droite – rappels

Propriété

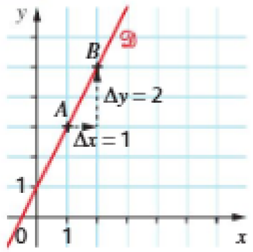
Dans un repère du plan, une droite $\mathscr{D}$, non parallèle à l'axe des ordonnées, admet une unique équation de la forme $y = mx + p$ où m et p sont des nombres réels.

Cette équation s'appelle **l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$**, m est le **coefficient directeur** de $\mathscr{D}$ et p est l'**ordonnée à l'origine** de $\mathscr{D}$.

Remarques

- Si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ sont deux points distincts de $\mathscr{D}$, le **coefficient directeur** de la droite $\mathscr{D}$ est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- L'**ordonnée à l'origine** d'une droite est l'ordonnée du point de la droite qui a pour abscisse 0.

Exemple



La droite $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{1} = 2$ et pour ordonnée à l'origine $p = 1$.
L'équation réduite de $\mathscr{D}$ est donc :
$$y = 2x + 1$$

b Équation réduite d'une tangente

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et **dérivable en un nombre réel a**.

L'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point **$A(a\,;f(a))$** est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarques

- Si $M(x_M\,;y_M)$ est un point, distinct de A, appartenant à la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a\,;f(a))$ alors :
$$f'(a) = \frac{y_M - f(a)}{x_M - a}$$
On peut ensuite utiliser la propriété précédente pour obtenir l'équation réduite de $\mathscr{T}$.
- Lorsque le nombre dérivé en a d'une fonction f est égal à 0, alors la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a\,;f(a))$ est parallèle à l'axe des abscisses (puisque son coefficient directeur est nul). On dit alors que la tangente est **horizontale** et son équation réduite est $y = f(a)$.

Exemple

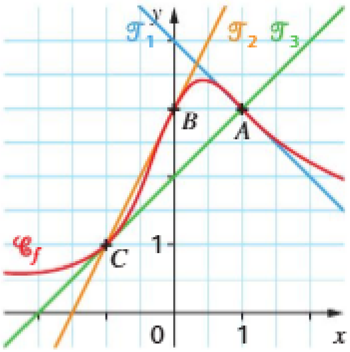
On considère la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a = 3$.
L'ordonnée de A est :
$$f(1) = 3^2 = 9$$
Le nombre dérivé de f en 3 peut être trouvé à l'aide de la calculatrice :

$\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right)\Big|_{x=3}$ 6

Ainsi la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A(3 ; 9) a pour équation $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$ ce qui équivaut à :
$$y = 6(x - 3) + 9$$
On obtient $y = 6x - 18 + 9$ soit
$$y = 6x - 9$$

Exercice IV

48 Soit f une fonction dont la courbe est tracée dans le repère ci-contre, ainsi que trois tangentes $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$.



1. Lire l'équation de chaque tangente.

2. Calculer les coordonnées du point d'intersection des tangentes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

3. On admet que, en repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à –1.
Montrer que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_3$ sont perpendiculaires.

✂--

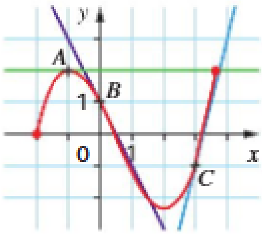
Exercice V

QCM Exercice interactif

Voir corrigés

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;\,3{,}5]$ dont on donne la représentation graphique ci-contre. On a tracé les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A, B et C d'abscisses respectives –1 ; 0 et 3.



	a	b	c
1. L'ordonnée du point B est égale à :	0	1	–2
2. $f(0)$ est égal à :	0	1	–2
3. $f(3)$ est :	négatif	nul	positif
4. $f'(-1)$ est égal à :	0	1	2
5. Le nombre dérivé de f en 0 est égal à :	0	1	–2
6. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B a pour équation :	$y=-2x+1$	$y=x-2$	$y=-2x-1$
7. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point C est égal à :	–4	2	4
8. $f'(2)$ est égal à :	–1	0	2
9. $f'(1)$ est :	négatif	nul	positif
10. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse –2 est :	négatif	nul	positif