

I-Pour bien commencer

Activité 1

Situation 1 Produits de seconde main

Un reportage sur francetvinfo.fr indique que les Français achètent de plus en plus de produits de seconde main, tous types confondus (électroménager, vêtements, livres, etc.). En 2019, il s'est vendu environ 573 000 tonnes de produits de seconde main.

Depuis, on constate une progression annuelle d'environ 11,9 %.

1 Calculer la quantité de produits de seconde main vendue en 2020, puis en 2021.

2 Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité de produits de seconde main vendue en $2019 + n$.

a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

b. Calculer la quantité de produits de seconde main vendue en 2025.

c. Existe-t-il un entier naturel n qui permet d'estimer la quantité vendue en milieu d'année 2025 ? pourquoi ?

3 Par prolongement de la suite (u_n) , on définit sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ la fonction f par $f(x) = 573\,000 \times 1,119^x$.

a. Expliquer pourquoi il est maintenant possible d'estimer la quantité de produits de seconde main vendue en milieu d'année 2025 ? Calculer cette quantité.

b. Calculer la quantité de produits de seconde main vendue au premier trimestre 2023, puis au troisième trimestre 2024.

Objectif

Passer d'un modèle discret à un modèle continu.



Info

On dit que la fonction f modélise, de manière continue, la quantité vendue de produits de seconde main.

On observe ici que la variable x est en exposant. On parle de croissance exponentielle.



Activité 2

Situation 2 Vente de bracelets

1 Compléter la propriété : « Soient n et p deux entiers naturels et a un nombre réel strictement positif. On a : $a^n \times a^p = a^{n+p}$ ».

2 Une entreprise produit et vend, chaque mois, un millier d'exemplaires d'un modèle de bracelets. Face à l'augmentation des coûts de fabrication, l'entreprise souhaite augmenter le prix de vente de ce bracelet. Une étude montre que chaque augmentation du prix de vente de 1 € conduit à une baisse des ventes mensuelles de 2 %.

On note $f(x)$ la quantité mensuelle, en millier, de bracelets vendus lorsque le prix augmente de x euros. On admet que $f(0) = 1$.

a. Montrer que $f(1) = 0,98$ et calculer $f(2)$. Interpréter les résultats dans le contexte de la situation.

b. Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

c. Calculer les quantités vendues, en millier, si l'entreprise augmente le prix de 1,10 €, de 1,50 € puis de 2,60 €.

d. Calculer $f(1,1) \times f(1,5)$ et compléter :

$$f(1,1) \times f(1,5) = f(\dots + \dots)$$

La propriété de la question **1** semble-t-elle rester valable pour deux exposants réels ?

Objectif

Étendre les propriétés des puissances entières aux fonctions exponentielles.



Activité 3

Situation 3 Population biarrote

D'après l'INSEE, la population de l'agglomération de Biarritz est passée de 24 993 habitants en 2013 à 25 787 habitants en 2019.

1 a. Par quel nombre, arrondi à 10^{-4} , a été multipliée la population de Biarritz entre 2013 et 2019 ?

b. En déduire le taux d'évolution, en pourcentage arrondi au centième, de la population de Biarritz entre 2013 et 2019.

2 On souhaite savoir de quel pourcentage, en moyenne, la population a augmenté chaque année entre 2013 et 2019.

Pour cela, on cherche donc par quel même nombre x la population doit être multipliée chaque année entre 2013 et 2019 pour obtenir la même évolution globale sur cette période.

a. Parmi les trois équations suivantes, laquelle répond au problème ?

$$\bullet 6x = \frac{25787}{24993} \quad \bullet 6x = \frac{24993}{25787} \quad \bullet x^6 = \frac{24993}{25787} \quad \bullet x^6 = \frac{25787}{24993}$$

b. Sur la calculatrice, afficher le tableau de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = x^6$, pour x variant de 1 à 1,1 avec un pas de 0,0001.

c. Quelle est la valeur de x qui répond le mieux au problème ?

d. En déduire le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la population de Biarritz entre 2013 et 2019.

Objectif

Découvrir les taux moyens.



La grande plage de Biarritz et son Casino.

rad		GRAPHEUR
Expressions	Graphique	Tableau
Résultats exacts	Régler l'intervalle	
x	f(x)	
1.005	1.030378	
1.0051	1.030993	
1.0052	1.031608	
1.0053	1.032224	
1.0054	1.032841	
1.0055	1.033457	
1.0056	1.034074	
1.0057	1.034691	



II- Synthèse de cours

1 Fonctions exponentielles de base a , avec $a > 0$

a Définition

Soit a un nombre réel strictement positif.

On rappelle que la suite (u_n) de terme général $u_n = a^n$ est une suite géométrique, définie uniquement pour les entiers naturels n .

Définition

On appelle fonction exponentielle de base a , avec $a > 0$, toute fonction f définie pour tous nombres réels x positifs, par $f(x) = a^x$.

La fonction exponentielle de base a est le prolongement de la suite géométrique de raison a des puissances entières de a pour des valeurs positives non entières.

Remarques

- Pour tout nombre $a > 0$, on a : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.
- Pour tout nombre réel $x \geq 0$, la valeur de a^x s'obtient à l'aide de la calculatrice.
- Pour tout nombre réel, $x \geq 0$, on admet que $a^x > 0$. On dit qu'une fonction exponentielle est toujours strictement positive.

Exemples

Soient f et g les deux fonctions exponentielles de bases respectives 1,2 et 0,8.

Pour tout nombre réel $x \geq 0$, on a $f(x) = 1,2^x$ et $g(x) = 0,8^x$.

Exemples

rad	CALCULS
$1.2^{3.1}$	1.759794122

rad	CALCULS
$0.4^{1.56}$	0.2394493081

b Propriétés algébriques des fonctions exponentielles de base a

On sait que, pour tous entiers naturels n et p , on a $a^n \times a^p = a^{n+p}$.

Propriété

Soit f une fonction exponentielle de base a , avec $a > 0$.

Pour tous nombres réels positifs x et y , on a $f(x) \times f(y) = f(x+y)$.

Ainsi on a : $a^x \times a^y = a^{x+y}$.

Remarque

Cette propriété algébrique est le prolongement à des exposants positifs non entiers de celle connue sur les puissances.

Par extension des propriétés algébriques des puissances entières connues depuis le collège, on obtient des propriétés algébriques similaires pour les fonctions exponentielles.

Propriété

Pour tous nombres réels positifs x et y et pour tout nombre réel $a > 0$, on a :

- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^y = a^{x \times y}$

Exemples

- $0,3^{4,2} \times 0,3^{0,8} = 0,3^{4,2+0,8} = 0,3^5$
- $1,6^{0,9} \times 1,6^{-0,3} = 1,6^{0,9+(-0,3)} = 1,6^{0,6}$

Exemples

- $\frac{5,2^{8,2}}{5,2^{1,3}} = 5,2^{8,2-1,3} = 5,2^{6,9}$
- $7,1^{-3,9} = \frac{1}{7,1^{3,9}}$
- $(8,1^{2,5})^2 = 8,1^{2,5 \times 2} = 8,1^5$

Exercice I

17 Après des travaux, un parc aquatique a vu sa fréquentation augmenter chaque mois de 9 %. Il y avait en moyenne 5 400 visiteurs par mois avant les travaux.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n le nombre mensuel de visiteurs n mois après les travaux.

a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser la raison q . Exprimer u_n en fonction de n .

b. Peut-on calculer le nombre de visiteurs 10 semaines après les travaux ? Pourquoi ?

2. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 5\,400 \times q^x$ où q est la raison de (u_n) .

a. Pourquoi f est-elle une modélisation continue à croissance exponentielle du nombre mensuel de visiteurs ?

b. Calculer le nombre de visiteurs au bout de 10 semaines.



Exercice II

35 Selon le ministère de l'agriculture, la surface agricole utilisée (SAU) par les agriculteurs en France métropolitaine s'élevait à 29,8 millions d'hectares en 2000.

Depuis, on estime qu'elle baisse en moyenne de 0,2 % par an.

1. Calculer la SAU estimée en 2001, puis en 2002.

2. On modélise la SAU estimée en $2000 + x$ (avec $x \geq 0$) par la fonction f définie par $f(x) = 29,8 \times q^x$.

a. Donner la valeur de q .

b. Calculer la SAU estimée en 2010, en milieu d'année 2012 et au troisième trimestre 2020.



2

Étude d'une fonction exponentielle de base a , avec $a > 0$

a Sens de variation

On sait que la suite géométrique de terme général a^n est :

- strictement croissante lorsque $a > 1$;
- constante lorsque $a = 1$;
- strictement décroissante lorsque $0 < a < 1$.

On a, de manière similaire, les variations des fonctions exponentielles.

Propriété

Soit f une fonction exponentielle de base a , avec $a > 0$, définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = a^x$.

- Pour $a > 1$, la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- Pour $a = 1$, la fonction f est constante sur $[0 ; +\infty[$.
- Pour $0 < a < 1$, la fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

Si $a > 1$

x	0	$+\infty$
a^x	1	$\nearrow$

Si $0 < a < 1$

x	0	$+\infty$
a^x	1	$\searrow$

Remarque

En multipliant une fonction exponentielle par un nombre **positif**, le sens de variation de la fonction obtenue reste le même.

En la multipliant par un nombre **négatif**, le sens de variation change.

Exemples

Soient f et g les deux fonctions exponentielles définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1,2^x$ et $g(x) = 0,8^x$.

- $1,2 > 1$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- $0 < 0,8 < 1$ donc g est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

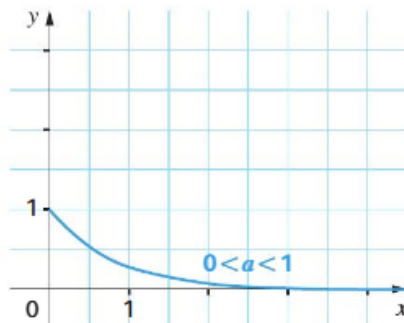
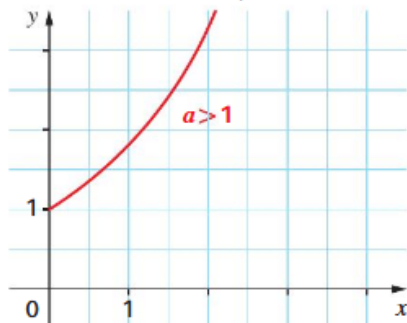
b Représentation graphique

Définition

Dans un repère, la **représentation graphique** d'une fonction exponentielle de base a , avec $a > 0$, est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; a^x)$ où $x \in [0 ; +\infty[$.

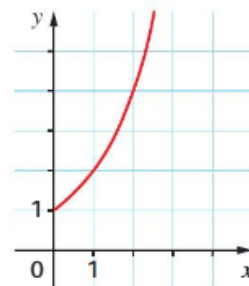
Remarque

- On sait que, pour tout nombre réel $a > 0$, on a $a^0 = 1$. La représentation graphique d'une fonction exponentielle passe donc toujours par le point de coordonnées $(0 ; 1)$.
- Ci-dessous des allures de représentations graphiques de fonctions exponentielles de base a , suivant la valeur de a .



Exemple

Ci-dessous, la représentation graphique de la fonction exponentielle de base 2.

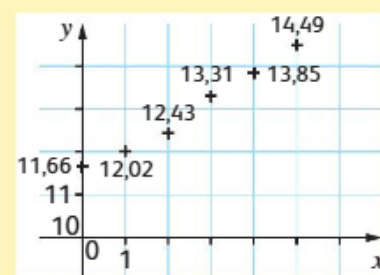


La fonction exponentielle de base 2 croît très rapidement. Elle peut décrire un phénomène continu de croissance très rapide. On parle de **croissance exponentielle**.

Exercice III

Le nuage de points ci-contre donne le nombre de passagers, en million, à l'aéroport de Nice en $2014 + n$, où $n \in \mathbb{N}$, avant la pandémie de Covid-19.

On admet que le nombre de passagers a augmenté en moyenne chaque année de 4,6 %. On modélise le nombre de passagers en $2014 + x$ (avec $x \geq 0$) par la fonction f définie par $f(x) = 11,54 \times 1,046^x$.



Source : Union des aéroports français

1. a. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f suivant.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$						

b. Dans un même repère, reproduire le nuage de points et construire la courbe de f .

c. Peut-on considérer que la fonction f est une modélisation acceptable du nombre de passagers ?

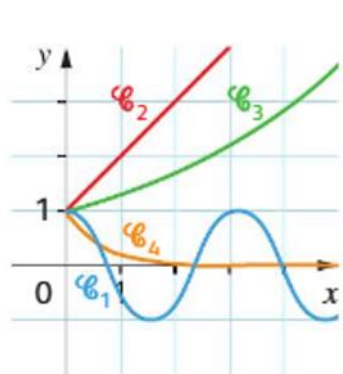
2. a. Par lecture graphique, estimer le nombre de passagers au milieu de l'année 2017. Retrouver le résultat par le calcul.

b. Au cours de quel trimestre le nombre de passagers dépasse-t-il 15 millions ?

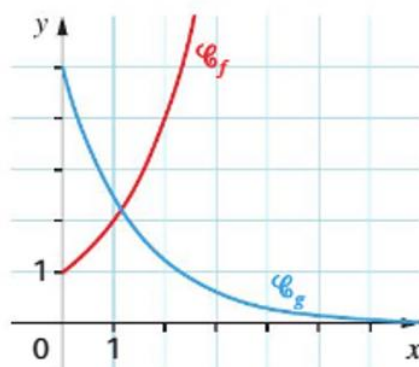


Exercice IV

37 Parmi les courbes ci-contre, lesquelles pourraient représenter une fonction exponentielle définie par $f(x) = a^x$, avec $a > 0$?



38 On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ respectivement par $f(x) = a^x$ et $g(x) = k \times b^x$ où a, b et k sont des réels strictement positifs. On donne ci-contre les courbes représentatives des deux fonctions.



1. a. Lires les images par f de 0 ; 1 et 2.

b. En déduire l'expression de la fonction f .

2. a. Lire les images par g de 0 et de 1.

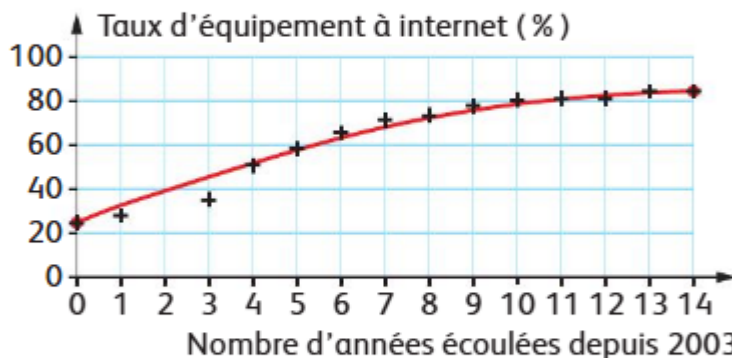
b. En déduire l'expression de la fonction g .



Exercice V

52 Une étude de l'INSEE permet de modéliser le taux d'accès des ménages à Internet pour l'année $2003 + x$ par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{90}{1 + 1,8 \times 0,763^x}$$



Source : INSEE.

1. Estimer le taux d'accès à Internet pour 2020 si l'évolution se maintient.
2. Peut-on prévoir que 95 % des ménages français auront un jour accès à Internet ?



3 Taux d'évolution moyen

a Racine n -ième d'un nombre réel positif

Propriété et définition

Soient a un nombre réel positif et n un entier naturel non nul.

L'équation $x^n = a$ admet une **unique** solution positive appelée **racine n -ième** de a . On la note $\sqrt[n]{a}$.

Remarque

- On a $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
- La racine n -ième d'un nombre positif a est positive.
- La racine 2-ième d'un nombre positif a correspond à la racine carrée de a .

Propriété

Soient a un nombre réel positif et n un entier naturel non nul.

La racine n -ième de a est égale à $a^{\frac{1}{n}}$.

En effet, d'après les propriétés algébriques des fonctions exponentielles, on

sait que $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \times n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$.

Exemple

L'équation $x^5 = 32$ admet une solution unique appelée la **racine 5-ième** de 32. On la note $\sqrt[5]{32}$. Elle est égale à 2. En effet, $2^5 = 32$.

Exemple

La racine 5-ième de 32, notée $\sqrt[5]{32}$, est égale à $32^{\frac{1}{5}}$. À la calculatrice, on obtient bien $32^{\frac{1}{5}} = 2$.

b Taux d'évolution moyen

Rappel

Soit n un entier naturel non nul.

Si une valeur de départ V_d subit n évolutions successives, la première de $t_1\%$, la deuxième de $t_2\%$, etc., jusqu'à la dernière de $t_n\%$, alors elle est multipliée successivement par n coefficients multiplicateurs $CM_1, CM_2, \dots, CM_n$.

Le coefficient multiplicateur global est $CM_{\text{Global}} = CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n$



Définition et propriété

Soit n un entier naturel non nul.

Si une valeur de départ subit n évolutions successives, alors on appelle coefficient multiplicateur moyen le nombre :

$$CM_{\text{Moyen}} = (CM_{\text{Global}})^{\frac{1}{n}}$$

Le taux d'évolution moyen t_{Moyen} associé à plusieurs évolutions successives est $t_{\text{Moyen}} = CM_{\text{Moyen}} - 1$.

Exemple

Un prix augmente successivement de 10 %, puis de 30 % et baisse enfin de 10 %.

- Globalement, il est multiplié par

$$CM_{\text{Global}} = 1,10 \times 1,30 \times 0,90 = 1,287$$

- Si ce prix avait connu trois évolutions successives identiques conduisant à la même évolution globale, alors il aurait été multiplié à trois reprises par le nombre :

$$CM_{\text{Moyen}} = 1,287^{\frac{1}{3}} \approx 1,088$$

- Le taux d'évolution moyen associé à ces trois évolutions est $t_{\text{Moyen}} = 1,088 - 1 = 0,088$. Une évolution identique sur 3 ans conduisant à la même évolution globale serait de 8,8 % environ.

Exercice VI

19 On donne le nombre d'élèves de Première n'ayant pas choisi la spécialité Mathématiques dans un lycée entre 2019 et 2022.

Années	2019	2020	2021	2022
Effectifs	185	212	198	175

1. Compléter le schéma des taux d'évolution annuelle, en pourcentage arrondi à l'unité, du nombre d'élèves n'ayant pas choisi la spécialité Mathématiques.

Années	2019	2020	2021	2022
Évolutions		+ ... %	+ ... %	+ ... %

2. Calculer le taux d'évolution moyen du nombre d'élèves n'ayant pas choisi la spécialité Mathématiques entre 2019 et 2022.

20 Le bénéfice annuel d'une entreprise a augmenté de 10 % en 2020, de 12 % en 2021 et de 3 % en 2022. Il était de 54 000 € en 2019.

1. Calculer le taux d'évolution global, puis le taux d'évolution moyen du bénéfice de l'entreprise entre 2020 et 2022.

2. Calculer le bénéfice en 2023 si l'évolution annuelle moyenne reste identique.



Exercice VII

44 Calculer le taux d'évolution moyen associé aux évolutions successives suivantes.

- +15 % suivi de +32 %
- 45 % suivi de -65 %
- +60 % suivi de -60 %

45 Le tableau ci-dessous donne des valeurs approximatives de la population mondiale en fonction des années jusqu'à 1950.

Année	Population
1000	300 millions
1500	500 millions
1900	1,650 milliard
1950	2,5 milliards

1. Déterminer le taux moyen d'augmentation par siècle entre 1000 et 1500, puis entre 1500 et 1900.
2. Déterminer le taux d'augmentation décennal moyen entre 1900 et 1950.
3. À quel taux moyen par siècle correspond le taux décennal obtenu entre 1900 et 1950 ?

✂-----

Exercice VIII

43 Vrai ou faux ?

1. Le nombre d'entrées dans un complexe sportif a augmenté de 40 % en dix ans. En moyenne, le nombre d'entrées a augmenté chaque année de 4 %.
2. Une production baisse chaque année successivement de 10 %, puis de 25 % et enfin de 5 %. En moyenne sur la période, elle baisse chaque année d'environ 13,8 %.

✂-----

Exercice IX

55 Le taux moyen d'augmentation mensuelle d'un prix sur une année est de 15 %.

1. Quel est le taux global d'augmentation de ce prix sur cette année ?
2. Par quel coefficient faut-il multiplier la valeur finale de ce prix pour qu'il revienne à sa valeur d'origine ?
3. L'année suivante, le prix est revenu à sa valeur d'origine. Quelle est la valeur du taux moyen mensuel de diminution sur cette seconde année ?