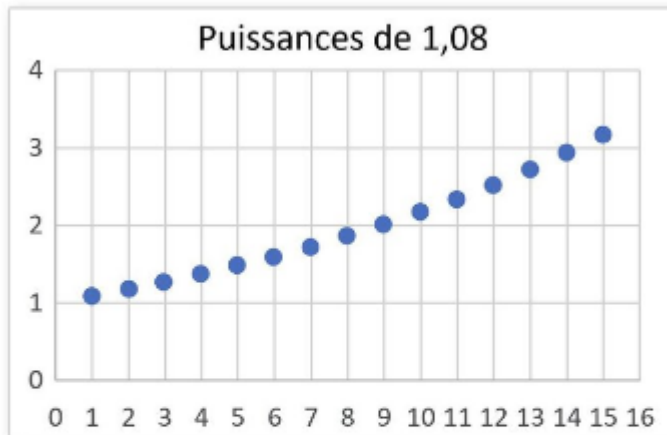


I-Pour bien commencer

6 On donne ci-dessous un graphique réalisé avec un tableur représentant des puissances successives de 1,08.



1. À quelle puissance correspond le dernier point tracé ?
2. Identifier sur le graphique la plus grande puissance de 1,08 inférieure à 2. Vérifier par le calcul.
3. Identifier sur le graphique la plus petite puissance de 1,08 supérieure à 3.
4. À l'aide de la calculatrice, trouver la plus petite puissance de 1,08 supérieure à 100.
5. Une puissance de 1,08 peut-elle dépasser 1 000 ?

II-Notion de suite géométrique



Activité 1

Situation 1 À chaque rebond

Pour réaliser une expérience, on lance une balle depuis une hauteur de 7 mètres. À chaque rebond, la balle remonte à la moitié de la hauteur du rebond précédent.

- 1 Déterminer la hauteur atteinte par la balle après le premier rebond, puis après le deuxième rebond.
- 2 Pour tout entier naturel n , on note $h(n)$ la hauteur, en mètre, atteinte par la balle au n -ième rebond.
 - a. Donner $h(1)$, $h(2)$ et $h(3)$.
 - b. Quelle opération permet de passer d'un terme de la suite au suivant ?
 - c. Soit n un entier naturel. $h(n)$ est la hauteur atteinte par la balle au n -ième rebond et $h(n+1)$ la hauteur au rebond suivant. Parmi ces deux relations, laquelle est correcte ?

Relation 1 : $h(n) = \frac{1}{2} h(n+1)$

Relation 2 : $h(n+1) = \frac{1}{2} h(n)$

Objectif

Découvrir la notion de suite géométrique.



La formule de récurrence trouvée dans la question 2 b. permet de dire que la suite h est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

Notation Indicielle

Pour une suite u quelconque, on utilisera dans ce thème la notation u_n au lieu de $u(n)$. Cette notation, plus concise, est celle massivement adoptée dans le contexte des suites.

On utilisera aussi parfois la notation (u_n) pour identifier la suite u .



Définition

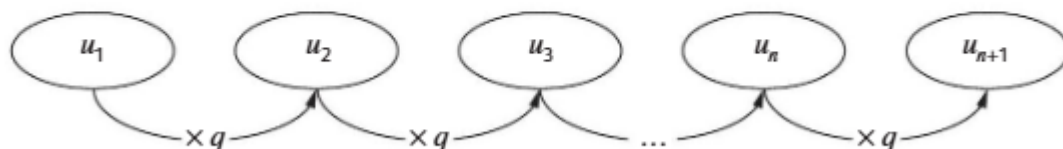
Une suite est dite **géométrique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant toujours par un même nombre réel positif q , appelé **raison** de la suite.

Autrement dit, pour tout entier naturel n , on a alors la relation :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

On limitera l'étude des suites géométriques à celles qui sont à termes strictement positifs, c'est-à-dire dont la raison et le premier terme sont strictement positifs.

Schématisation



Remarques

- La relation $u_{n+1} = q \times u_n$ est une « relation de récurrence ».
- La connaissance de u_0 permet de calculer le terme qui suit u_1 en multipliant u_0 par la raison q . Le calcul de u_2 devient alors possible, etc.
- Le rapport entre deux termes consécutifs d'une suite géométrique est constant et permet de retrouver la raison de la suite :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$



Exemple d'application

Chaque année, le bénéfice d'une entreprise augmente de 4 %.

En 2023, le bénéfice réalisé était de 100000€.

n est un entier naturel, et on note u_n le bénéfice réalisé par l'entreprise durant l'année 2023+ n .

- Combien vaut u_0 ?
- Quel sera le bénéfice réalisé durant l'année 2024 ? Comment le note-t-on avec la suite u ?
- Déterminer u_2 . A quoi correspond concrètement cette valeur ?
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Que peut-on dire de la suite u ?



Exercice 1

10 Soit (u_n) la suite géométrique de premiers termes :

$$u_0 = 4 ; u_1 = 24 \text{ et } u_2 = 144.$$

Déterminer la raison de cette suite.

11 Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme

$$v_0 = 7 \text{ et de raison } 2.$$

Déterminer v_1 , v_2 et v_3 .



Activité 2

Situation 2 La légende de Sissa

La légende raconte que le jeu d'échec aurait été inventé aux Indes par le sage Sissa. Le roi à qui il le présenta fut enthousiaste et demanda à Sissa de choisir une récompense. Ce dernier fit alors une requête qui sembla bien modeste au roi : qu'on lui donne un grain de riz pour la première case du jeu, deux grains de riz pour la deuxième et ainsi de suite, en doublant le nombre de grains de riz à chaque fois. Touché par une si humble demande, le roi accepta sans hésitation, dans un premier temps...

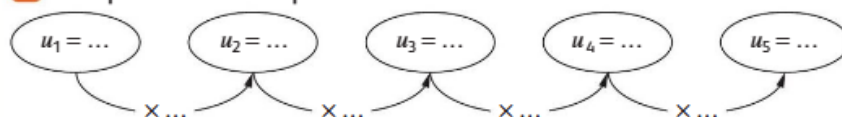
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de grains de riz offerts pour la n -ième case.

1 D'après l'énoncé, donner la valeur de u_1 et de u_2 .

2 Calculer u_3 et u_4 .

3 Quelle est la nature de la suite ? Préciser sa raison.

4 a. Reproduire et compléter le schéma suivant.



b. En déduire l'expression de u_5 en fonction de u_1 .

c. Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la formule permettant d'obtenir directement le terme u_n en fonction du terme u_1 .

5 Le plateau de jeu compte 64 cases. La demande de Sissa semble-t-elle réalisable ? On estimera le poids d'un grain de riz à 0,05 g.

Objectif

Découvrir la formule explicite d'une suite géométrique.



Info

Cette situation, qui est sans doute tout à fait légendaire, donne une idée de ce que l'on nomme dans le langage courant un phénomène de « croissance exponentielle ».



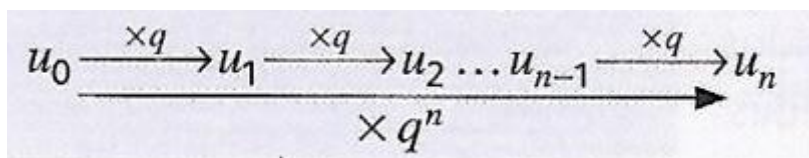
♥♥♥ Formule explicite d'une suite géométrique ♥♥♥

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

Alors pour tout entier naturel n , on a : ♥♥♥ $u_n =$ $=$ ♥♥♥

On a exprimé u_n en fonction de n , et on peut donc calculer facilement n'importe quel terme de la suite (u_n) , c'est pour cela que la formule précédente est appelée expression explicite de u_n .

Le schéma ci-dessous permet de retrouver cette relation en cas d'oubli :



Remarque

Il arrive que certaines suites soient définies à partir du rang 1 ou du rang 2.

La précédente formule s'adapte sans peine :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$: ♥♥♥ $u_n = q^{n-1} \times u_1$, ♥♥♥

Pour tout entier naturel $n \geq 2$: ♥♥♥ $u_n = q^{n-2} \times u_2$, ♥♥♥

Exercice 2

1) Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

- a) Exprimer u_n en fonction de n .
- b) Combien vaut u_7 ? Et le terme de rang 4 ?
- c) Combien vaut le dixième terme de cette suite ?

✂-----

Exercice 3

50 Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 500$ et de raison $q = 0,8$.

- 1. Calculer v_2 , v_3 et v_4 .
- 2. Exprimer, pour tout entier $n \geq 1$, v_n en fonction de n .
- 3. En déduire la valeur du 17^e terme de la suite. Arrondir à 10^{-3} .

✂-----

Exercice 4

40 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2(n+1)$.

- 1. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
- 2. La suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier.

✂-----

Exercice 5

46 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ telle que $u_2 = 16$. Calculer u_4 .

Calculer son premier terme u_0 .

Exercice 6

37 Dans chaque cas, dire si la situation peut être modélisée par une suite géométrique. Lorsque c'est le cas, en donner la raison.

Situation 1

Le nombre d'employés d'une entreprise augmente chaque année de 5 %.

Situation 2

Laisser à l'air libre des micro-organismes diminue leur population de moitié chaque heure.

Situation 3

Allan décide de mettre de l'argent de côté sur un compte. Tant qu'il n'y touche pas, il gagnera chaque année 10 % du montant initialement déposé (intérêts simples).

Situation 4

Pour compenser l'inflation, un pâtissier augmente chaque année le prix de ses viennoiseries de 10 centimes.

Situation 5

Pendant le dégel, l'épaisseur de glace sur un lac diminue de 1 cm tous les deux jours.

Situation 6

On joue à « Pile ou Face » avec une pièce équilibrée. On s'intéresse à la probabilité de n'obtenir que des résultats « Face » aux n lancers réalisés.



Exercice 7

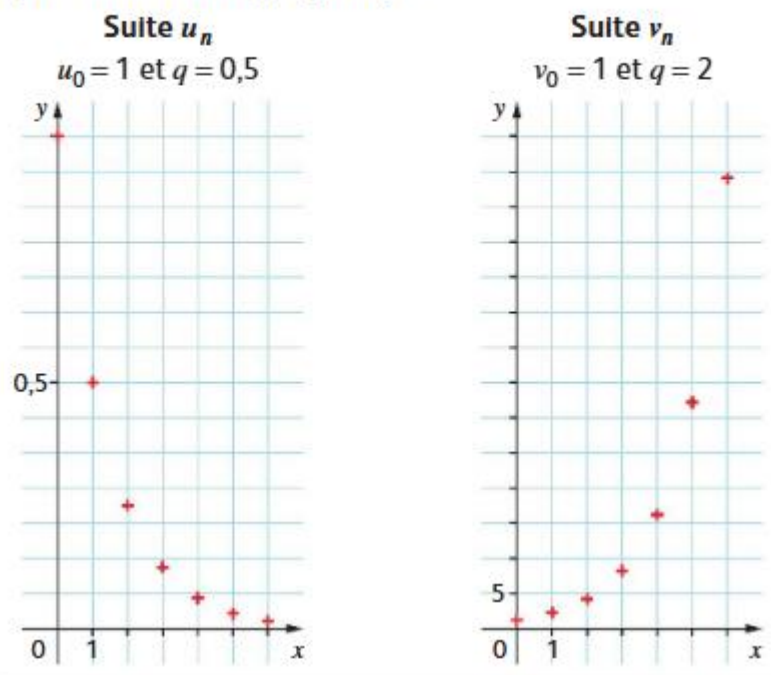
79 On estime qu'un club de cyclisme voit son nombre d'adhérents augmenter de 12 % chaque année. En 2023, ce club compte 50 membres.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre estimé d'adhérents au club de cyclisme pour l'année $2023 + n$.

1. Donner a_0 .
2. Calculer a_1 et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1,12 \times a_n$, puis en déduire la nature de la suite (a_n) .
4. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de a_n en fonction de n .
5. Calculer le nombre estimé d'adhérents en 2027.
6. À partir de quelle année ce club devrait-il compter plus de 100 adhérents ?

III- Sens de variation des suites géométriques

a Représentation graphique



Remarque

Une suite géométrique permet de modéliser des phénomènes discrets de croissance exponentielle.

b Variations d'une suite géométrique

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique strictement positive.

Pour tout entier naturel n , on a :

- si $q > 1$, alors, $u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est **croissante** ;
- si $q < 1$, alors, $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est **décroissante** ;
- si $q = 1$, alors, $u_{n+1} = u_n$: la suite (u_n) est **constante**.

Exercice 8

32 Vrai ou faux ?

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier la réponse.

1. La suite géométrique (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2 \times u_n$ est décroissante.

2. La suite géométrique (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 0,7 \times v_n$ est décroissante.



Exercice 9

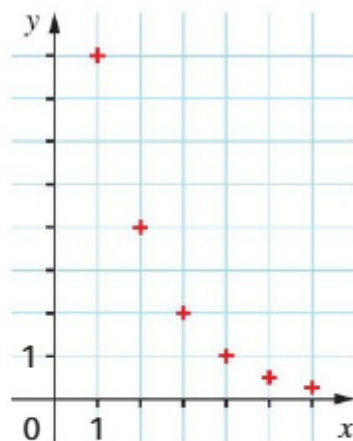
33 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 20$ et de raison $q = 0,5$.

1. Donner le sens de variation de la suite (u_n) .

2. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite.

Exercice 10

34 On donne ci-contre la représentation graphique des six premiers termes d'une suite géométrique.



1. Quel est le sens de variation de cette suite ?

2. Par lecture graphique, quelle est la raison de cette suite géométrique ? Quel est son premier terme ?

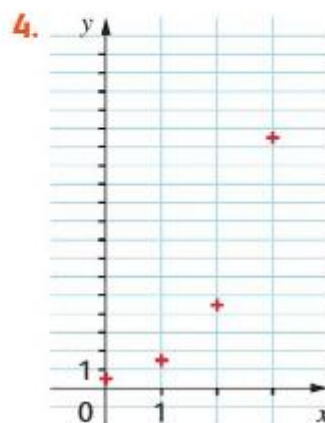
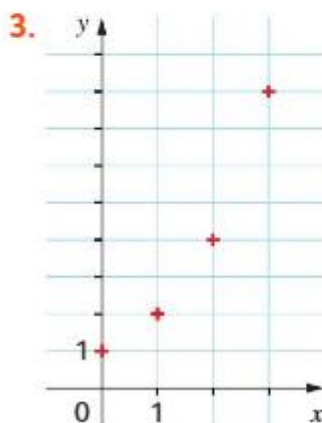
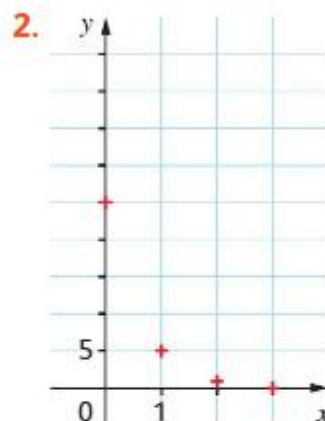
3. Donner la forme explicite de cette suite, en exprimant, pour tout entier naturel n , le terme u_n en fonction de n .

4. Donner le terme u_{10} sous forme d'une fraction irréductible.



Exercice 11

55 On donne les représentations des suites géométriques suivantes.



Dans chaque cas, lire le premier terme et déterminer la raison de la suite.

Exercice 12

58 Soit (u_n) une suite géométrique de raison 8 et de premier terme $u_0 = 3$.

1. Donner les variations de la suite (u_n) .
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n .
3. Compléter le tableau de valeurs suivant.

n	0	1	2	3	4
u_n	3				

4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 1\,000$.
5. Quel est l'ordre de grandeur du terme u_{10} ?

✂-----

Exercice 13

- 61** 1. Combien faut-il d'augmentations successives de 5 % pour qu'une quantité initiale soit plus que doublée ?
2. Est-il possible que, suite à des augmentations successives de 5 %, une quantité dépasse le centuple de sa valeur initiale ?

✂-----

Dm : 63 ; 72 ou 73 avec q sens variation , 81 , 84 , 86 (rev suites arithmétiques) , 90 ou 91 ??