

Pour bien commencer

On considère le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre
Élever au carré le nombre choisi
Ajouter 5 au nombre obtenu

- 1** Appliquer le programme aux nombres -1 ; 0 et 3 .
- 2** On note x le nombre choisi et $f(x)$ le nombre obtenu après application à x du programme de calcul.
Exprimer $f(x)$ en fonction de x .
On définit ainsi une fonction f associée à ce programme.
- 3** Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = -2x + 1$.
 - a.** Calculer les images de 0 ; 1 et 5 par g .
 - b.** Écrire un programme de calcul associé à la fonction g .

Activité 1

On considère deux listes infinies de nombres :

Liste A : $2 ; 5 ; 8 ; 11 ; \dots$

Liste B : $7 ; 5 ; 3 ; 1 ; \dots$

- 1** Poursuivre chaque liste de manière « logique » en donnant les deux nombres qui suivent.

- 2** Chaque liste constitue une suite de nombres qu'on appelle « suite numérique ». On notera respectivement u et v ces suites.

Chaque nombre d'une liste est un « terme » de la suite.

On numérote chaque terme à l'aide d'un entier naturel.

Par exemple, le premier terme de la suite u , représentée par la liste A, sera noté $u(0)$; il est égal à 2 .

$u(1)$ est alors le terme suivant de la suite.

- a.** Que vaut $u(1)$?

- b.** Donner les valeurs de $v(0)$ et $v(1)$.

- 3** Soit n un entier naturel. On dit que $u(n)$ est le terme de rang n et $u(n+1)$ est le terme de rang $n+1$. Ainsi, $u(n+1)$ est le terme qui suit le terme $u(n)$.

Parmi ces 2 relations, laquelle est correcte ?

Pour n entier naturel quelconque :

- a.** relation 1 : $u(n+1) = u(n) + 3$;

- b.** relation 2 : $u(n) = u(n+1) + 3$.

- 4** Soit n un entier naturel. Déterminer une relation reliant les termes $v(n+1)$ et $v(n)$.

Définition 1

Une suite u est une fonction dont la variable est un entier naturel, noté n plutôt que x .

L'image $u(n)$ est un nombre réel appelé le terme de rang n .

On note le terme de la suite $u(n)$ ou u_n . L'entier n est aussi appelé l'indice.

Lorsqu'on a une égalité qui exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$, on dit qu'on est en présence d'une suite récursive.

Exercice 1

46 Dans chaque cas, calculer les trois premiers termes de la suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

1. $u(n+1) = u(n) + 1$ avec $u(0) = 3$
2. $u(n) = 4n + 3$
3. $u(n) = 7 - 2n$

Dans l'activité, on passe du terme $u(n)$ au terme $u(n+1)$ en ajoutant toujours le même nombre.

Définition 2

Une suite u est arithmétique lorsqu'il existe un réel r , nommé raison, tel que pour tout entier naturel n : $u(n+1) = u(n) + r$ ou $u_{n+1} = u_n + r$.

L'écriture du terme de rang $n+1$ en fonction du terme de rang n donne une relation de récurrence vérifiée par la suite u .

SF1 Savoir calculer les premiers termes d'une suite

La suite u vérifiant, pour tout entier naturel n : $u(n+1) = u(n) + 4$ est une suite arithmétique. Si on a $u(0) = 5$, alors :

le deuxième terme est : $u(1) = \dots$ On remplace n par 0 dans la formule ci-dessus.

le troisième terme $u(2) = \dots$ On remplace n par 1 dans la formule ci-dessus.

Attention, le premier terme étant $u(0)$, le dixième terme est

Exercice 2

1. La gare de départ d'un téléphérique est à 500 m d'altitude. On considère que le téléphérique progresse à vitesse constante, son altitude s'élevant de 50 m par minute. On note $u(0)$ l'altitude initiale du téléphérique, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ l'altitude du téléphérique au bout de n minutes.

a. Donner $u(0)$. Que représente $u(1)$? Calculer $u(1)$.

b. Établir une relation de récurrence, c'est-à-dire, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.

c. En déduire que la suite u est arithmétique et préciser sa raison.

2. L'ascension du téléphérique dure exactement 20 minutes.

a. Quelle est l'altitude de la gare d'arrivée ?

b. On appelle $v(n)$ l'altitude qu'il reste à gravir au téléphérique depuis le départ. La suite v est-elle arithmétique ?

Activité 2

Titouan souhaite économiser afin de pouvoir s'acheter une des nouvelles consoles de jeu qui sortiront dans un an. Parmi ces consoles la Wintendo Qwwitch coûte 320 €, la Xboux coûte 390 € et la Pluistation coûte 550 €. Au départ, Titouan vérifie ses économies et constate qu'il possède déjà 50 €. Il décide alors de mettre 30 € de côté chaque mois pendant 1 an. Ainsi, à la fin du premier mois Titouan rajoute 30 € dans sa cagnotte, il possède alors 80 € au total.

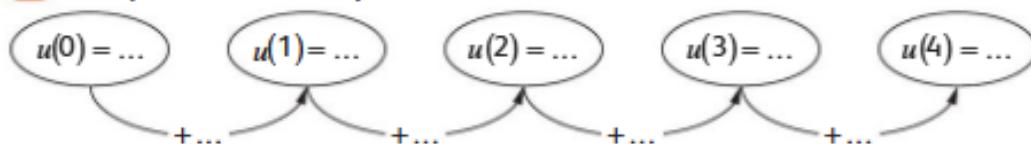
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ le contenu de la cagnotte de Titouan à la fin du n -ième mois.

1 D'après l'énoncé, donner les valeurs de $u(0)$ et $u(1)$.

2 Calculer $u(2)$ et $u(3)$.

3 Quelle est la nature de la suite ? Préciser sa raison.

4 **a.** Reproduire et compléter le schéma suivant.



b. En déduire l'expression de $u(4)$ en fonction de $u(0)$.

c. Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule permettant d'obtenir directement le terme $u(n)$ en fonction du terme $u(0)$.

5 Quelle(s) console(s) Titouan peut-il acheter au bout d'un an ?

➤-----

Dans l'activité 2 page 51, la cagnotte de Titouan, initialement de 50€, augmente de 30€ chaque mois.

La formule permettant de calculer le montant de la cagnotte au bout du n ème mois est :

$$u(n) = \dots \dots \dots \dots$$

Propriété 1

Une suite u est une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u(0)$ si et seulement si, pour tout entier naturel n : $\heartsuit\heartsuit$ $u(n) =$ $\heartsuit\heartsuit$

Si le premier terme est $u(1)$, alors $u(n) =$

Cette écriture est la forme explicite de la suite u .

Exercice 3

Soit la suite arithmétique u de premier terme $u(0) = -2$ et de raison $r = 7$.

1. Calculer $u(1), u(2)$ et $u(3)$.

2. Déterminer $u(n)$ en fonction de n , c'est-à-dire la forme explicite de u . En déduire $u(10)$.

➤-----

SF 2 Savoir modéliser un phénomène discret

Léo achète une plante qui mesure 15 cm au départ. Il observe qu'elle pousse de 2 cm tous les mois.

On pose $u(n)$ la taille de la plante au bout de n mois. Alors $u(0) = \dots$

Elle peut se calculer avec la formule explicite : $u(n) = \dots + \dots \times \dots$

Exercice 4

44 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = n^2$.

1. Calculer $u(0)$, $u(1)$ et $u(2)$.
2. La suite u est-elle arithmétique ? Justifier.

Exercice 5

52 Soit u la suite arithmétique de premier terme

$u(0) = -5$ et de raison $r = 17$.

1. Calculer $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ en fonction de n .
3. Calculer $u(8)$.
4. Compléter la phrase à l'aide du résultat de la question précédente : « la valeur du ...ème terme est ... ».

Exercice 6

45 Un réservoir cylindrique contient 360 L de liquide au départ. Dans ce réservoir, une hauteur de 1 cm de liquide correspond à un volume de 30 L.

Chaque minute, on verse 75 L de liquide dans ce réservoir.

On appelle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ la hauteur, en cm, du liquide dans le réservoir après n minutes.

1. Quelle est la valeur de $u(0)$?
2. Exprimer, pour tout entier naturel n , $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.
3. Calculer $u(30)$ et interpréter le résultat.
4. La hauteur du réservoir est de 3 m. À partir de quand dépassera-t-on les trois quarts de sa capacité ? Quel volume de liquide contiendra-t-il alors ?

Activité 3

Situation 3 Avec des cartes à jouer

Avec un jeu de 54 cartes, on construit des « ponts » successifs en les complétant au fur et à mesure de la façon suivante.

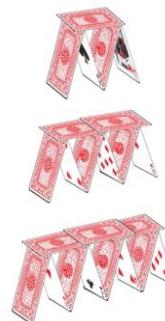
Le premier motif comporte deux arches et une carte « tablier », le deuxième motif trois arches et deux cartes pour le tablier, le troisième motif quatre arches et trois cartes tablier, etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle $u(n)$ le nombre de cartes utilisées pour le n -ième motif et $v(n)$ le nombre de cartes restant dans le jeu après la construction du n -ième motif.

- 1 Préciser $u(1)$ et $v(1)$.
- 2 Justifier que u et v sont deux suites arithmétiques dont on précisera les raisons respectives.
- 3 Recopier et compléter le tableau suivant.

n	1	2	3	4	5
$u(n)$					
$v(n)$					

- 4 Placer, dans un repère, les points de coordonnées $(n ; u(n))$ en rouge et les points de coordonnées $(n ; v(n))$ en bleu pour n allant de 1 à 5.
- 5 À partir de quel motif aura-t-on utilisé plus de la moitié des cartes du paquet de 54 ?



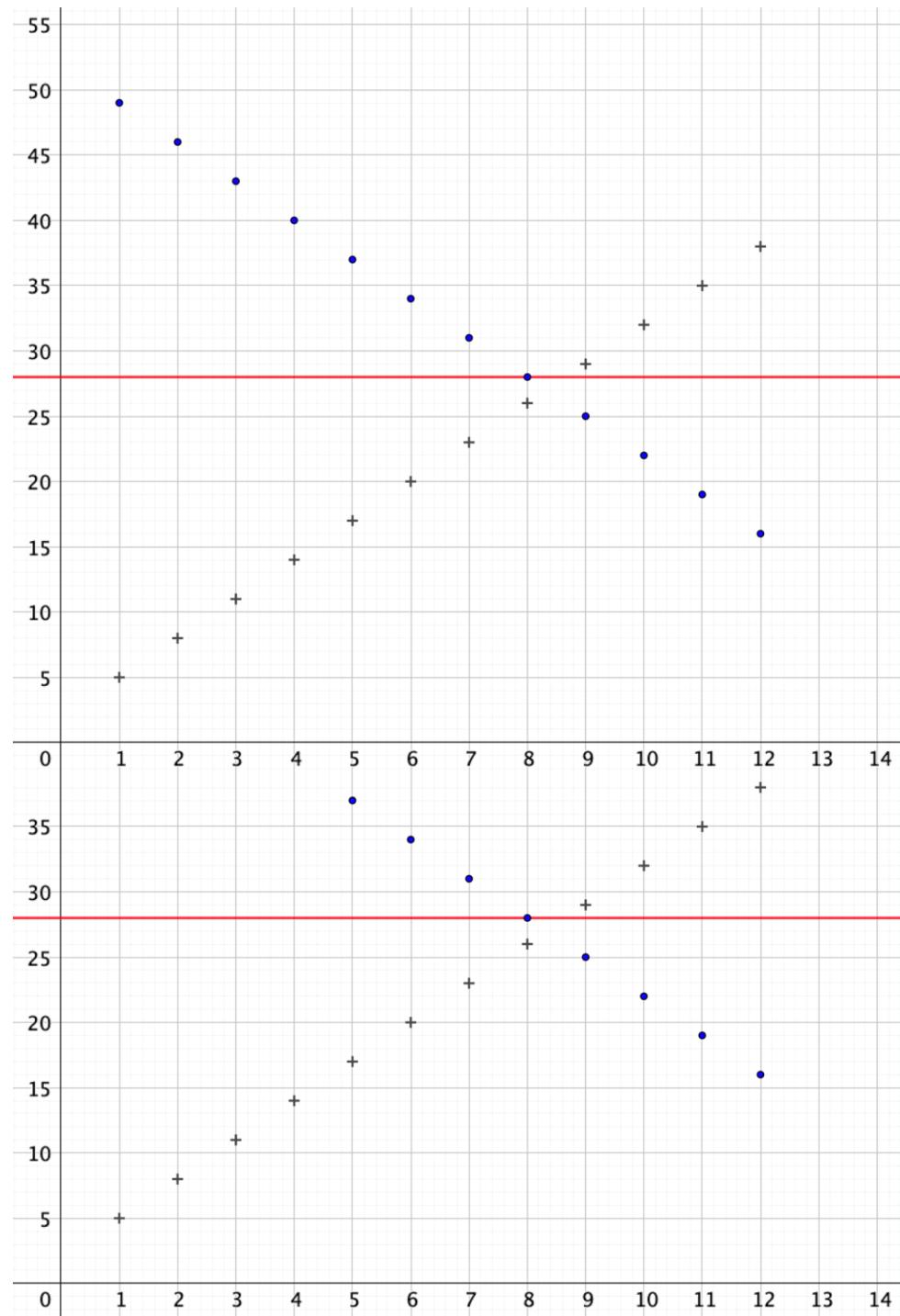
----->

Dans l'activité 3, avec un jeu de 54 cartes, on construit des ponts successifs.

$u(n)$ représente le nombre de cartes utilisées pour le n ^{ième} motif et $v(n)$ le nombre de cartes restant dans le jeu.

Attention : ici la suite est définie à partir de $n = 1$.

n	u(n)	v(n)
1	5	49
2	8	46
3	11	43
4	14	40
5	17	37
6	20	34
7	23	31
8	26	28
9	29	25
10	32	22
11	35	19
12	38	16



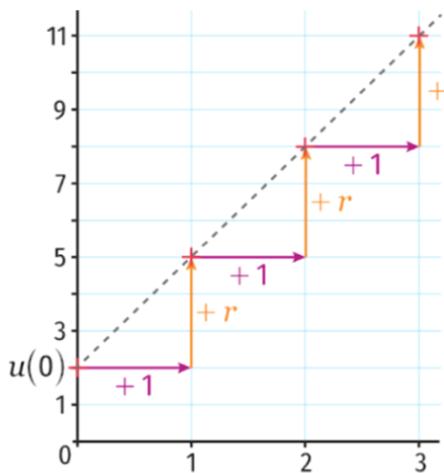
On aura utilisé plus de la moitié des cartes, c'est-à-dire plus de 27 cartes à partir de $n = \dots$.

2/

SF 3 Savoir représenter graphiquement une suite arithmétique

Propriété 2 Dans un repère, une suite u peut être représentée par un nuage de points de coordonnées $(n; u(n))$, $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas d'une suite arithmétique, ce nuage de points forme un ensemble de points alignés.



Les points appartiennent à la droite d'équation :

$$y = \dots x + \dots$$

Remarque : une suite arithmétique permet de modéliser un phénomène discret à croissance linéaire.

Propriété 3 Une suite arithmétique u de raison r est :

1. strictement croissante si et seulement si $r > 0$
2. strictement décroissante si et seulement si $r < 0$
3. strictement constante si et seulement si $r = 0$

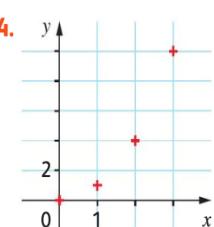
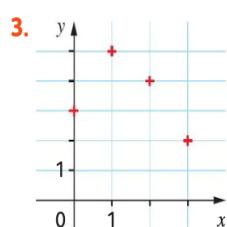
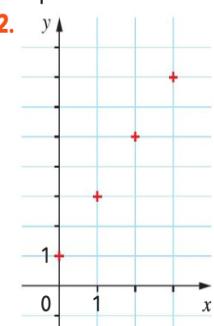
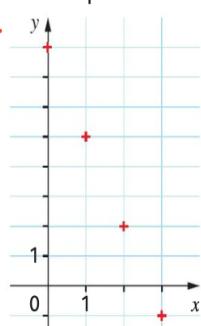
L'écart entre deux termes consécutifs est égal à $u(n+1) - u(n) = r$

Exercices

58 Soit u la suite arithmétique de premier terme $u(1) = -3$ et de raison $r = 4$.

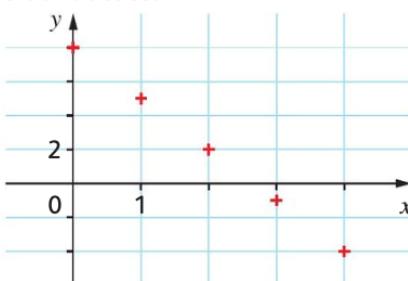
1. Donner le sens de variation de la suite u .
2. Calculer $u(2)$, $u(3)$ et $u(4)$.
3. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite.

59 Chaque graphique ci-dessous représente les premiers termes d'une suite. Dans chaque cas, préciser si cette suite peut être arithmétique ou non.



60 Vrai ou faux ?

On donne la représentation graphique de la suite arithmétique u . Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.



1. Le premier terme de la suite u est 5.
2. $u(3) = 1$.
3. La raison de la suite est $r = -3$.
4. La suite u est décroissante.

63 Dans chaque cas, déterminer le plus petit entier naturel n , tel que :

1. $u(n) > 15$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = 3n + 2$.
2. $v(n) \leq 31$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v(n) = 76 - 5n$.

74 En janvier 2022 Anne-Sophie décide de mettre de côté un capital de 2 300 €. Tous les mois, elle décide de déposer 115 € supplémentaires.

Pour tout entier naturel n , on note $c(n)$ le capital d'Anne-Sophie après n mois. Ainsi, $c(0) = 2 300$.

1. Calculer $c(1)$.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c(n+1)$ en fonction de $c(n)$.
3. En déduire la nature de la suite c . On précisera son premier terme et sa raison.
4. Au mois de mars 2023, quel sera le montant placé par Anne-Sophie ?

80 Soit v la suite arithmétique de premier terme $v(1) = 716$ et de raison $r = -24$.

1. Déterminer l'expression de $v(n)$ en fonction de n .
2. En déduire la valeur du 17^e terme de la suite.
3. Déterminer le plus petit entier $n \geq 1$, tel que $v(n) < -136$.

85 Un puits mesure 15 m de profondeur. Au fond de ce puits l'eau occupe 2,5 m de hauteur. Un escargot se situant à la limite de l'eau commence son ascension pour sortir du puits. Il monte de 15 cm par heure. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $h(n)$ la hauteur atteinte, en mètre, par l'escargot après n heures.

1. Justifier que la suite h est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(n)$ en fonction de n .
3. Combien d'heures faudra-t-il à l'escargot pour sortir du puits ?

66 Camille est une grande lectrice et décide en 2022 d'acheter tous les mois 7 nouveaux livres. Avant de prendre cette décision, elle possédait déjà 122 livres dans sa bibliothèque.

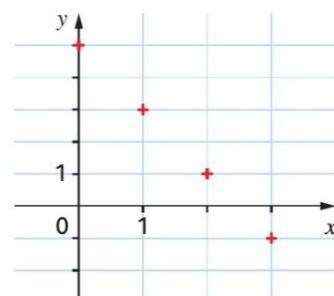
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $l(n)$ le nombre de livres possédés par Camille après n mois.

1. Donner la valeur de $l(0)$.
2. a. Calculer $l(1)$.
- b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Déterminer la nature de la suite l et donner sa raison.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $l(n)$ en fonction de n .
5. Après combien de mois la bibliothèque de Camille contiendra plus de 150 livres ?

91 QCM

Pour chaque question, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. Soit u la suite arithmétique définie sur \mathbb{N} telle que $u(0) = 4$ et $u(7) = -17$.
 - a. La raison est -3 .
 - b. La suite u est décroissante.
 - c. $u(5) = -12$
 - d. La suite u est croissante.
2. Soit v la suite arithmétique de premier terme $v(1) = -2$ et de raison $r = 6$.
 - a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v(n) = 2 + 6n$.
 - b. La suite v est décroissante.
 - c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v(n+1) = v(n) - 2$
 - d. La suite v est croissante.
3. On représente graphiquement la suite arithmétique w :



- | | |
|--------------------------------|---------------------------|
| a. Sa raison est -2 . | b. $w(2) = 3$ |
| c. $w(15) = -30$ | d. $w(n) = 2n - 5$ |

95

... en économie

Croissance d'un poste budgétaire

En 2022, la famille Martin dépense en moyenne 3 150 € par mois. Les dépenses liées au logement représentent cette année-là 30 % du total.



1. Montrer qu'en 2022, la famille Martin aura dépensé 11 340 € dans le logement.

2. On estime que les dépenses annuelles dues au logement vont augmenter de 420 € par an. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D(n)$ les dépenses dans le logement de cette famille durant l'année $2022 + n$.

On a $D(0) = 11\ 340$.

a. Calculer $D(1)$ et $D(2)$.

b. Justifier que la suite D est arithmétique, préciser sa raison.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(n)$ les dépenses totales liées au logement entre 2022 et $2022 + n$. Ainsi, $T(0) = 11\ 340$.

a. Montrer que $T(1) = 23\ 100$ et $T(2) = 35\ 280$.

b. La suite T est-elle arithmétique ?

4. Pour calculer ses dépenses liées au logement, la famille Martin utilise la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D
1	Année : $2022+n$	2022	2023	2024
2	Dépenses annuelles dans le logement : $D(n)$	11340		
3	Dépenses dans le logement depuis 2022 : $T(n)$	11340		

Quelles formules doit-elle saisir dans les cellules C2 et C3 respectivement afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les dépenses annuelles et les dépenses depuis 2022 ?