

Exercice I (environ 13 points)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On prendra 2 cm comme unité sur chaque axe pour les constructions.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_C = 1 - \sqrt{3}i$.

1a) Donner la forme trigonométrique de z_B et en déduire celle de z_C .

1b) Construire rigoureusement les points A, B et C dans le repère précédent.

On se propose de déterminer l'ensemble noté $\mathcal{D}$ formé par tous les points M d'affixe z tels que : $|z| = |z - 2|$.

2a) Vérifier que les points B et C appartiennent à $\mathcal{D}$. Le point A appartient-il à $\mathcal{D}$?

2b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{D}$ en justifiant.

3) A tout point M d'affixe z , avec $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe z' , où $z' = \frac{-4}{z-2}$.

a) Déterminer l'écriture algébrique des affixes des points B' et C' respectivement associés aux points B et C.

b) Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 2$, on a : $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

c) Soit M un point d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}$. Démontrer que le point M' (associé à M) appartient à un cercle noté Γ dont on précisera le centre et le rayon. Construire Γ .

d) Justifier que B et C appartiennent à Γ .

Exercice II (2 points)

Dans un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ construire rigoureusement :

a) **En bleu** : l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $1 \leq |z| \leq 2$ **et** $\arg(z) \in \left] \frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{4} \right]$.

b) **En vert** : l'ensemble des points N d'affixe z tels que : $\arg(-z) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } \arg(z) = 0 [\pi]$.

Exercice III (environ 2,5 points)

Soit M un point d'affixe z non nulle, et M' le point d'affixe $z' = \frac{-1}{\bar{z}}$.

1) Vérifier que pour tout complexe z non nul, $z' = \frac{-z}{|z|^2}$.

2) En déduire que O, M et M' sont alignés.

3) Les points M et M' peuvent-ils être confondus ? Justifier.

4) Si z appartient à $\mathbb{U}$, que peut-on dire des points M et M' ?

Exercice IV (environ 3 points) Les deux questions sont indépendantes.

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{C}$ par : $f(z) = |z + 2|^2 + |2 - z|^2$.

Déterminer l'image du cercle unité par f .

2) Montrer que : $\forall (a; b; c) \in \mathbb{U}^3, |a + b + c| = |ab + bc + ca|$