***Nota bene* : Je ne réponds à aucune question durant le contrôle.**

***Exercice I* (environ 8,5 points)**

Soit A et B et C les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) Déterminer le nombre de lignes et de colonnes de chacune des matrices A, B et C.

2) Donner un exemple de matrice diagonale d'ordre 2 non nulle.

3) On appelle trace d'une matrice carrée la somme de ses éléments situés sur sa diagonale principale. Calculer la trace de A.

4) Les produits suivants existent-ils ? Justifier et les calculer le cas échéant : AB ; BA ; AC.

5) Ecrire la matrice E suivante, sachant que E est une matrice carrée d'ordre 3 et que pour tous entiers i et j compris entre 1 et 3, ses coefficients e_{ij} vérifient : $e_{ij} = \begin{cases} i - j \text{ si } i > j \\ i + j \text{ si } i \leq j \end{cases}$.

6) Simplifier les écritures suivantes, sachant que M désigne une matrice inversible d'ordre n :

i) $M \times I_n \times M^{-1}$ *ii)* $2M \times (3M^{-1} - 5I_n)$ *iii)* $(M - I_n)(2M^{-1} + 3I_n)$.

***Exercice II* (environ 1,5 points)**

Pour tout réel θ, soit $R = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout réel θ, R est inversible, puis calculer R^{-1}.

***Exercice III* (environ 2 points)**

Soit M la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer M^2.

2) Montrer que M n'est pas inversible.

***Exercice IV* (environ 3 points)**

Soit a, un réel non nul et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

0) Calculer A^2.

1) Vérifier que : $A^2 - A - 2I_3$ est la matrice nulle.

2) En déduire que A est inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3 seulement.

Je tourne la page.

<u>Exercice V</u> (environ 5 points)

Une matrice carrée d'ordre n (où n est entier supérieur ou égal à 2) est appelée matrice magique lorsque :

Quelle que soit la ligne, quelle que soit la colonne :

La somme des coefficients figurant sur une même ligne est égale à la somme des coefficients figurant sur une même colonne qui est encore égale à la somme des coefficients figurant sur chacune des diagonales de la matrice.

1) Montrer que la matrice A= $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ est magique.

2a) Donner deux exemples de matrices magiques d'ordre 2.

2b) Déterminer toutes les matrices magiques d'ordre 2.

2c) En déduire qu'aucune matrice magique d'ordre 2 n'est inversible.

3a) On admet que la matrice A de la question 1) est inversible. A l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice A^{-1}, puis montrer que A^{-1} est une matrice magique.

3b) Montrer que l'ensemble des matrices magiques d'ordre $n \geqslant 3$ est stable par addition.