

Travail à rendre au plus tard pour le 30 Mars par groupes de 2 à 7 élèves.

Exercice I

On appelle répétition de l'unité (rep-unit), tout entier naturel dont chacun des chiffres est égal à 1.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par : $u_n = 1111\dots 1$, où le chiffre 1 est répété n fois.

- 0) Ecrire les six premiers termes de cette suite, et préciser lesquels sont divisibles par 3.
- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_{3n} est divisible par u_n .
- 2a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $10^{2n} + 10^n + 1$ est divisible par 3.
- 2b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, u_{3n} est divisible par $3u_n$.
- 3) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels formés de n chiffres tous égaux à 1 et qui sont divisibles par n .

Exercice II

On considère l'équation (E) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, avec $x, y \in \mathbb{Z}$.

- 1) Démontrer que si le couple $(x ; y)$ est solution de (E), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$.
- 2) Soit x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

$x \equiv \dots \pmod{5}$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \dots \pmod{5}$					

$y \equiv \dots \pmod{5}$	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv \dots \pmod{5}$					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

- 3) En déduire que si $(x ; y)$ est solution de (E), alors x et y sont des multiples de 5.
Conclure sur les solutions de (E).

Exercice III

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant comme il se doit :

a, b et x désignent des entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.

Affirmation 1 : « Si $a \equiv b \pmod{n}$, alors : $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$ ».

Affirmation 2 : « Si $3a \equiv 3b \pmod{6n}$, alors $a \equiv b \pmod{2n}$ ».

Affirmation 3 : « $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$, si et seulement si $x \equiv 1 \pmod{5}$ ».

Affirmation 4 : « Le reste dans la division euclidienne de 10^{2026} par 15 est égal à 6 ».

Affirmation 5 : « Pour tout entier naturel n non nul, $2^n - 1$ n'est jamais divisible par 9 ».

Exercice IV

- 0) Soit n un entier naturel. Démontrer qu'il existe des entiers naturels a et b uniques tels que :
 $n = 10a + b$ et $0 \leq b \leq 9$.
- 1) Établir la liste des multiples de 13 inférieurs à 100.
 - 2) Montrer que : $n \equiv 0 \pmod{13} \Leftrightarrow a + 4b \equiv 0 \pmod{13}$.
 - 3) Énoncer en français un critère simple de divisibilité par 13.
 - 4) En déduire, sans calculatrice, les multiples de 13 parmi les entiers suivants :
676, 943, 4 652, 156 556.

Exercice V

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.

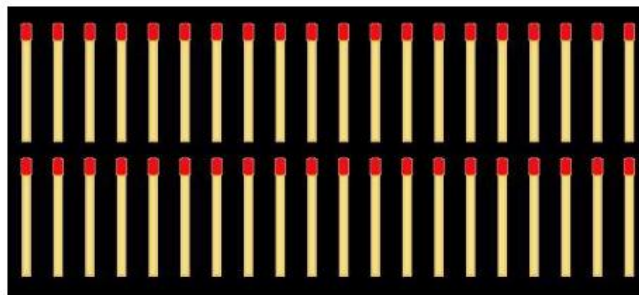
- 1) Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
- 2) Montrer que, quel que soit l'entier n , $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
- 3) Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$: $n^8 \equiv 1 \pmod{d}$.

Exercice VI

70 p.153 du livre.

Exercice facultatif (il est mignon et concret celui-la).

Sur la figure ci-dessous, 40 allumettes sont disposées sur le tapis.



Deux joueurs prennent chacun, à tour de rôle, une, deux trois ou quatre allumettes. Celui qui prend la dernière allumettes perd la partie.
Il existe une stratégie gagnante pour le joueur qui commence. Laquelle?

Exercice (facultatif, exercice désintégréateur)

Dans cet exercice, on considère des suites u à valeurs entières vérifiant une relation de récurrence $(\mathcal{R})$ exprimant u_{n+1} en fonction de u_n et n .

Soit q un entier naturel non nul. On dit que $(\mathcal{R})$ **possède une congruence stable modulo q** lorsqu'il existe un entier m tel que toute suite u à valeurs entières et vérifiant $u_0 \equiv m \pmod{q}$ et la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ vérifie aussi $u_n \equiv m \pmod{q}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Par exemple, la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 2$ possède une congruence stable modulo 2 car toute suite u vérifiant cette relation ainsi que $u_0 \equiv 0 \pmod{2}$ vérifie aussi $u_n \equiv 0 \pmod{2}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Dans les questions **M33** à **M36**, on considère la relation de récurrence

$$(\mathcal{R}_1) : u_{n+1} = (u_n)^2 + 1.$$

☐ **M33** Vrai ou faux? La relation $(\mathcal{R}_1)$ possède une congruence stable modulo 2.

☐ **A** Faux ☐ **B** Vrai

☐ **M34** Vrai ou faux? La relation $(\mathcal{R}_1)$ possède une congruence stable modulo 3.

☐ **A** Faux ☐ **B** Vrai

☐ **M35** Vrai ou faux? La relation $(\mathcal{R}_1)$ possède une congruence stable modulo 4.

☐ **A** Faux ☐ **B** Vrai

□ **M36** On se donne un entier quelconque a , et on considère la suite u vérifiant $u_0 = a$ et la relation de récurrence $(\mathcal{R}_1)$. Vrai ou faux? Deux termes consécutifs de u n'ont jamais la même parité, et ce quel que soit a .

☐ **A** Faux ☐ **B** Vrai

On considère à présent la relation de récurrence

$$(\mathcal{R}_2) : u_{n+1} = (n^2 + 1) u_n.$$

□ **M37** L'ensemble des $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $(\mathcal{R}_2)$ possède une congruence stable modulo q est :

- ☐ **A** réduit à un élément
☐ **B** vide
☐ **C** égal à $\mathbb{N}^*$
☐ **D** fini et possède plusieurs éléments
☐ **E** infini mais pas égal à $\mathbb{N}^*$

□ **M38** Soit u une suite à termes entiers vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R}_2)$. L'affirmation « pour tout entier naturel n , l'entier u_n a la même parité que u_0 » est alors :

☐ **A** vraie ☐ **B** fausse

On considère à présent, et jusqu'à la fin de l'exercice, la relation de récurrence

$$(\mathcal{R}_3) : u_{n+1} = au_n + b,$$

où a est un entier (relatif) différent de 1 et b est un entier (relatif).

Pour les questions **M39** à **M41**, on étudie le cas particulier où $a = 5$ et $b = -1$: la relation de récurrence est donc $u_{n+1} = 5u_n - 1$.

☐ **M39** La relation $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo 3.

☐ **A** Faux ☐ **B** Vrai

☐ **M40** La relation $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo 6.

☐ **A** Faux ☐ **B** Vrai

☐ **M41** La relation $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo 7.

☐ **A** Faux ☐ **B** Vrai

Dans toute la suite, on ne suppose plus que $a = 5$ ni que $b = -1$. Ainsi, a et b sont deux entiers relatifs quelconques vérifiant $a \neq 1$.

☐ **M42** La relation $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q si et seulement si :

☐ **A** $(a - 1)$ divise b

☐ **B** il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m = am + b$

☐ **C** il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \equiv am + b [q]$

☐ **M43** Vrai ou faux? Si $a - 1$ et q sont premiers entre eux, alors $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q .

☐ **A** Vrai ☐ **B** Faux

☐ **M44** Vrai ou faux? Si $q = a$, alors $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q .

☐ **A** Faux ☐ **B** Vrai

☐ **M45** Vrai ou faux? Si $q = a + 1$ et a est pair, alors $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q .

☐ **A** Faux ☐ **B** Vrai

☐ **M46** Vrai ou faux? Si $q = a + 1$, a est impair et b est impair, alors $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q .

☐ **A** Faux ☐ **B** Vrai

☐ **M47** Vrai ou faux? Si $q = a + 1$, a est impair et b est pair, alors $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q .

☐ **A** Vrai ☐ **B** Faux

☐ **M48** L'ensemble des entiers $q > 0$ tels que $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q est toujours :

☐ **A** vide ☐ **B** réduit à un élément ☐ **C** fini avec plusieurs éléments ☐ **D** infini

☐ **M49** Vrai ou faux? Il est possible d'ajuster a et b pour que la relation de récurrence $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo tout entier $q > 0$.

☐ **A** Vrai ☐ **B** Faux