***Consignes à lire attentivement :***

***Ce travail est à rendre pour le 19 Décembre .***

***Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 6 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.***

***Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.***

***Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.***

## Exercice I

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 + z^2 - 1 = 0$.

2) Déterminer le réel $m$ tel que $3 - 2i$ soit une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + mz + 13 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

3) Question facultative (conseillée à ceux voulant faire CPGE).

Soient $a$, $b$ et $c$ des réels avec $a$ non nul.
On suppose que l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions.

Exprimer $a(z_1 - z_2)^2$ en fonction de $a$, $b$ et $c$. Intéressant non ? Quels résultats du cours peut-on alors retrouver à partir du calcul précédent ? Justifier.

## Exercice II

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les 16 produits suivants : $I^2$, $IJ$, $IK$, $IL$, $JI$, $J^2$, $JK$, $JL$, $KI$, $KJ$, $K^2$, $KL$, $LI$, $LJ$, $LK$ et $L^2$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels.

*a)* Calculer les quatre produits : $XA$ où $X \in \{I, J, K, L\}$.

*b)* Calculer de même les quatre produits : $AX$, où $X \in \{I, J, K, L\}$.

3) Démontrer que toute matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels est une combinaison linéaire des matrices $I$, $J$, $K$ et $L$.

4) Ecrire la matrice M carrée d'ordre 3, dont les coefficients $m_{ij}$ sont définis par : $m_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{j} \text{ si } i < j \\ i + j \text{ si } i \geq j \end{cases}$.

## Exercice III

Faire les micros-exercices ou questions d'exercices suivants de votre livre :

26 p.237 ; 34 *c)* p.237 ; 43 p.238 ; 52 p. 239.

## Exercice IV

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre $n$, où $n$ est un entier non nul.

*a)* Démontrer que si A et B commutent, alors : $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

*b)* Calculer : $(A + I_3)^2$ sachant que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

***Exercice V***

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier $(A - I)(A + 2I) = 0$. En déduire que $A$ est inversible : préciser $A^{-1}$.
   De même, justifier que $A - I$ et $A + 2I$ ne sont pas inversibles.
2. Prouver l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de réels $a_n$ et $b_n$ tels que $A^n = a_n I + b_n A$.

***Exercice VI*** ***(Facultatif, conseillé si CPGE envisagée.)***

Soient A, B et C trois matrices non nulles de $M_3(\mathbb{R})$, telles que : $A \times B \times C = O_3$.

Montrer qu'au moins deux de ces matrices ne sont pas inversibles.