Maths expertes ***Devoir à la maison numéro 5*** ***Janvier 2026***

Travail à rendre pour le Lundi 9 ? Février par groupes de 2 à 6 élèves.

Exercice I

Faire l'exercice 14 page 17 du chapitre 3 sur les matrices. Cet exercice parle de vélo.

Exercice II

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on appelle A, B, C et S les points d'affixes respectives : $4+i$; $4-i$; $-i$ et $1+2i$.

0) Placer ces points sur une figure à compléter au fil des questions.
1) Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Construire $\mathscr{C}$.
2) A tout point M d'affixe $z\neq 2$, on associe le point M'd'affixe z', avec : $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.

a) Déterminer l'écriture algébrique des affixes des points A', B' et C'associés aux points A, B et C.

b) Démontrer que A', B' et C'appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$' dont le centre est le point P ayant pour affixe i. Déterminer le rayon de ce cercle, et le tracer.

c) Pour tout nombre complexe z différent de 2, exprimer $|z'-i|$ en fonction de $|z-2|$.

d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathscr{C}$. Montrer que $|z'-i| = 2\sqrt{5}$. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M'associés aux points M du cercle $\mathscr{C}$.

Exercice III

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et justifier comme il se doit :

Proposition 1

« Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité : $|z-2i| = |z+1|$ *est une droite parallèle à l'axe des réels ».*

Proposition 2

Soit (E) l'équation : $(z-1)(-z^2+8z-25) = 0$, où $z \in \mathbb{C}$.

« Les points du plan ayant pour affixes les solutions de (E) sont les sommets d'un triangle rectangle ».

Proposition 3 : *"Pour tout réel a, l'équation d'inconnue* $z\in\mathbb{C}$: $z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$ *admet deux solutions non réelles de même module".*

Proposition 4 : On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z + |z|^2 = 7+i$

" Cette équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ *".*

Proposition 5 **:** On considère l'équation (F) suivante : $z^2 + z + 1 = 0$.

" L'équation (F) a deux solutions complexes de modules égaux à 1".

Exercice IV

1) Soit a et b deux nombres complexes non nuls.

Démontrer que si a et b ont le même module, alors $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel. Démontrer que si a et b ont pour module 1, alors $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel positif. Indication : minimum de calculs, UNITES !!

2) Démontrer l'équivalence suivante : $\left(z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}\right)\Leftrightarrow\left(z\in\mathbb{R}^* \text{ ou } |z|=1\right)$

Exercice V ***(Cet exercice est issu de MPSI)***

On considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants : $\Omega=\{z\in\mathbb{C}, \mathrm{Im}(z)>0\}$ et $\Delta=\{z\in\mathbb{C}, |z|>1\}$.

0) Représenter graphiquement dans un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ les ensembles Ω et Δ.

a) Montrer que si un nombre complexe z appartient à $\Omega\setminus\{2i\}$, alors $\frac{z+2i}{z-2i}$ appartient à Δ.

b) On définit alors l'application $f : \begin{cases}\Omega\setminus\{2i\}\to\Delta\\ z\longmapsto\frac{z+2i}{z-2i}\end{cases}$

Résoudre l'équation d'inconnue z : $f(z)=b$, où $b\in\Delta$.

c) Démontrer que la précédente solution appartient à $\Omega\setminus\{2i\}$.

d) Quel est l'image de l'axe des imaginaires purs, privé du point d'affixe $2i$ par f ?

e) Démontrer que l'image par f du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2, privé de son point d'affixe $2i$, est contenu dans une droite que l'on précisera.

Etonnant cette application f qui transforme parfois un cercle en une partie de droite ? f porte le nom d'homographie, et à quelques choses près, on peut se ramener après quelques transformations géométriques, à l'étude de l'inversion g définie sur $\mathbb{C}^*$ par : $g(z)=\frac{1}{z}$. .

Nous étudierons en détail l'image d'un cercle-droite par cette inversion après le paragraphe du cours sur les arguments des nombres complexes non nuls.

Exercice facultatif mais formateur si CPGE envisagée.

Source : Bertault MPSI.

1 Isométries de $\mathbb{C}$

On appelle *isométrie de* $\mathbb{C}$ toute fonction $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ pour laquelle pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$: $|f(z)-f(z')|=|z-z'|$.

1) Soient $a,b\in\mathbb{C}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et b la fonction $z\longmapsto az+b$ est-elle une isométrie de $\mathbb{C}$? Même question avec $z\longmapsto a\overline{z}+b$.

2) Soit g une isométrie de $\mathbb{C}$ dont 0 et 1 sont des points fixes.

a) Montrer que $g(z)$ vaut z ou $\overline{z}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

b) Montrer que si $g(\mathrm{i})=\mathrm{i}$, alors $g=\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, et que si $g(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, alors $g=(z\longmapsto\overline{z})$.

3) **a)** Montrer que pour toute isométrie f de $\mathbb{C}$, la fonction $z\longmapsto\dfrac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)}$ est elle aussi une isométrie de $\mathbb{C}$.

b) Montrer finalement que les isométries de $\mathbb{C}$ sont les fonctions $z\longmapsto az+b$ et $z\longmapsto a\overline{z}+b$, (a,b) décrivant $\mathbb{U}\times\mathbb{C}$.