

Exercice I

1a) $z_B = 1 + \sqrt{3}i$, donc $|z_B| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

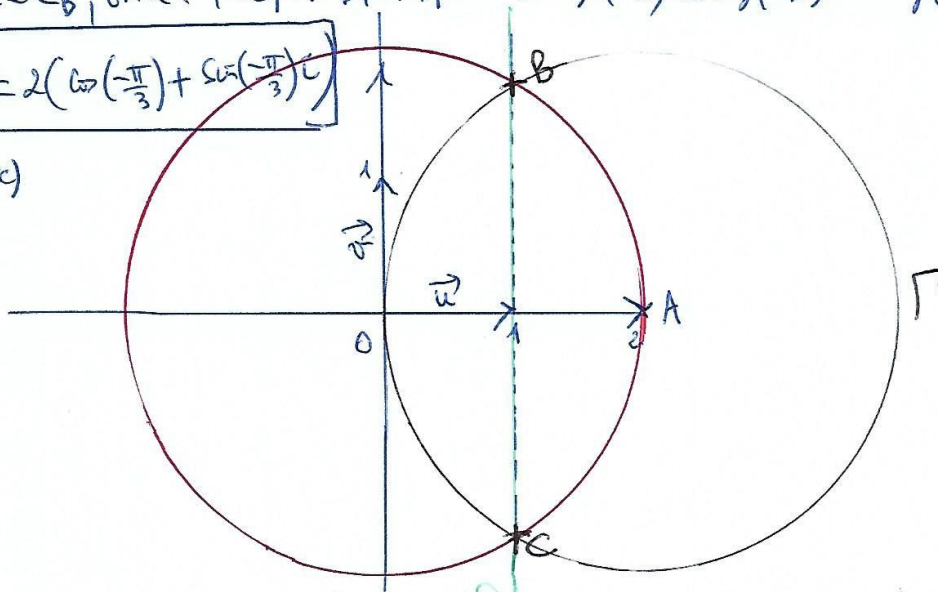
Soit θ un argument de z_B :
$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z_B)}{|z_B|} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z_B)}{|z_B|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \theta = \frac{\pi}{3}$$

Ainsi $z_B = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Vue que $z_C = \overline{z_B}$, on a: $|z_C| = |\overline{z_B}| = |z_B| = 2$ et $\arg(z_C) = \arg(\overline{z_B}) = -\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3}$ [24]

donc $z_C = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

1b) et 2b) et 3c)



2a) $z_B = 1 + \sqrt{3}i$, donc $|z_B| = 2$ (q. 1a) et $|z_B - 2| = |1 + \sqrt{3}i - 2| = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$
Donc $|z_B - 2| = |z_B|$, donc $B \in \mathcal{D}$.

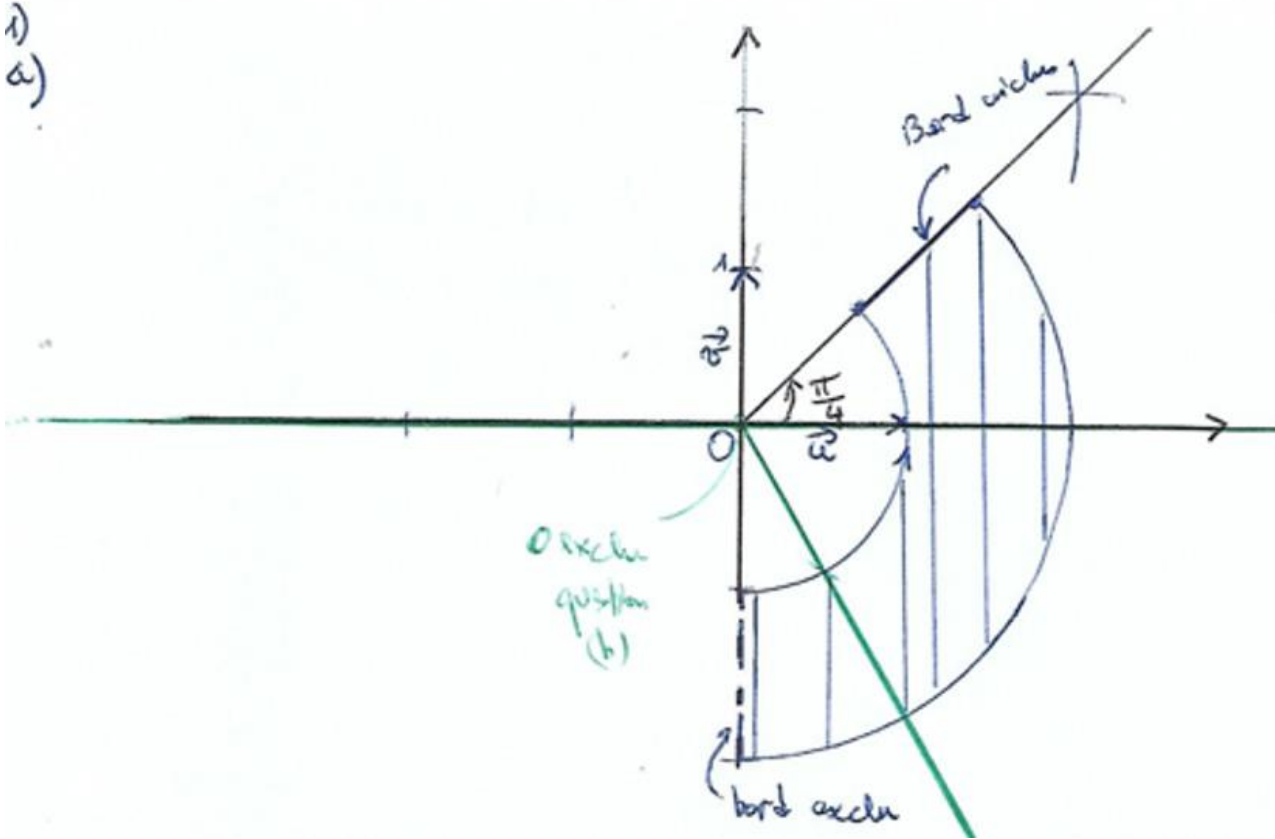
$z_C = \overline{z_B}$, donc $|z_C - 2| = |\overline{z_B} - 2| = |\overline{z_B - 2}| = |z_B - 2| = |z_B| = |\overline{z_B}| = |z_C|$
Ainsi, $|z_C - 2| = |z_C|$, donc $C \in \mathcal{D}$.

$|z_A| = |2| = 2$ et $|z_A - 2| = |2 - 2| = 0$, donc $|z_A - 2| \neq |z_A|$, donc $A \notin \mathcal{D}$.

2b) Soit $M(z)$: $M(z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow |z| = |z - 2| \Leftrightarrow |z_M| = |z_M - z_A| \Leftrightarrow OM = AM$

$M(z) \in \mathcal{D}$ équivaut à M équidistant de points O et A ce qui équivaut à M appartenir à la médiatrice de $[OA]$. Ainsi, $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment $[OA]$.

Exercice II



b) L'ensemble cherché est la réunion de la demi-droite des points de l'axe des ordonnées avec une ordonnée négative privée du point O origine du repère, car $\arg(-z) = -\arg(z) = \pi/2 \pmod{2\pi}$ donc $\arg(z) = -\pi/2 \pmod{2\pi}$, et de l'axe des réels privé de O. (Ici c'est modulo π , donc on prend toute la droite sauf O, on rappelle que 0 n'a pas d'argument. Le dessin est évident.

Exercice III

1) $z \neq 0$ et $\boxed{z' = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{-z}{z\bar{z}} = \frac{-z}{|z|^2}}$ car $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

2) $z' = \frac{z}{|z|^2}$ et $z = \frac{z}{|z|^2}$, donc par q.1) on a: $\vec{OM'} = -\frac{1}{|z|^2} \vec{OM}$.
 Or $-\frac{1}{|z|^2} \in \mathbb{R}_-$, donc $\vec{OM'}$ et $\vec{OM}$ sont colinéaires (de sens contraire) et ont O en commun.
 donc $\boxed{O, M \text{ et } M' \text{ sont alignés}}$

3) M et M' sont confondus équivaut à: $z' = z$ c'est à dire: $-\frac{1}{\bar{z}} = z$, ou encore: $\boxed{z\bar{z} = -1}$
 Ainsi $\boxed{M \text{ et } M' \text{ sont toujours distincts}}$.
 $\boxed{|z|^2 = -1}$
 impossible car $|z|^2$ est un réel positif!

4) $z \in \mathbb{U}$, donc $|z| = 1$.
 D'après q.1): $z' = \frac{-z}{|z|^2} = \frac{-z}{1} = -z$.
 Ainsi, M' et M ont des affixes opposées, ils sont donc symétriques par rapport à l'origine O
 ou encore O est le milieu de $[MM']$. (Si vous n'arrivez pas à le voir:
 $z' = -z \Leftrightarrow z + z' = 0 \Leftrightarrow \frac{z+z'}{2} = 0$)

Exercise IV

$$1) \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = |z+2|^2 + |z-2|^2$$

$$f(z) = (z+2)(\overline{z+2}) + (z-2)(\overline{z-2}) \quad \text{car } |z|^2 = z\overline{z}.$$

$$f(z) = (z+2)(\overline{z}+2) + (z-2)(\overline{z}-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{car } \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \\ \text{et } \overline{z} = z. \end{array} \right.$$

$$f(z) = z\overline{z} + 2z + 2\overline{z} + 4 + 4 - 2z - 2\overline{z} + z\overline{z}$$

$$f(z) = 2z\overline{z} + 8 = 2|z|^2 + 8.$$

$$\text{Si } z \in \mathbb{U}, \text{ alors } |z|=1 \text{ et donc } f(z) = 2 \times 1^2 + 8 = 10.$$

L'image de $\mathbb{U}$ par f est donc le point K d'abscisse 10.

$$2) a \in \mathbb{U} \text{ donc } |a|=1 \text{ donc } |a|^2=1, \text{ donc } a\overline{a}=1, \text{ donc } \overline{a} = \frac{1}{a} \text{ donc } a = \frac{1}{\overline{a}}$$

$$\text{de même } b \in \mathbb{U}, \text{ donc } \overline{b} = \frac{1}{b} \text{ et } c \in \mathbb{U}, \text{ donc } \overline{c} = \frac{1}{c}.$$

$$|a+b+c| = \left| \frac{1}{\overline{a}} + \frac{1}{\overline{b}} + \frac{1}{\overline{c}} \right| \quad \begin{array}{l} b = \frac{1}{\overline{b}} \\ c = \frac{1}{\overline{c}} \end{array}$$

$$|a+b+c| = \left| \frac{\overline{a}\overline{c}}{\overline{a}\overline{b}\overline{c}} + \frac{\overline{a}\overline{c}}{\overline{a}\overline{b}\overline{c}} + \frac{\overline{a}\overline{b}}{\overline{a}\overline{b}\overline{c}} \right| = \frac{|\overline{a}\overline{b} + \overline{b}\overline{c} + \overline{c}\overline{a}|}{|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|}$$

$$\text{Or } |\overline{a}\overline{b}\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot |\overline{c}| = |a| \cdot |b| \cdot |c| = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$\text{et } |\overline{a}\overline{b} + \overline{b}\overline{c} + \overline{c}\overline{a}| = |\overline{ab+bc+ca}| = |ab+bc+ca|.$$

$$\text{donc } \boxed{|a+b+c|} = \frac{|ab+bc+ca|}{1} = \boxed{|ab+bc+ca|}.$$