

$$1) S = \sum_{k=2}^{46} \frac{1}{k} \quad \text{ou encore} \quad S = \sum_{k=2}^{44} \frac{1}{k+2}$$

$$2) A = \sum_{k=2}^{18} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$3) a \neq b. \quad F = \frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} \quad \text{dénominateur commun} = (a-b)^2!$$

$$= \frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a-b)(a+b)^2}{(a-b)^2}$$

$$F = \frac{a^3 - b^3 - (a-b)(a^2 + 2ab + b^2)}{(a-b)^2} = \frac{a^3 - b^3 - (a^3 + 2a^2b + ab^2 - ba^2 - 2ab^2 - b^3)}{(a-b)^2}$$

$$\boxed{F} = \frac{\cancel{a^3} - \cancel{b^3} - \cancel{a^3} - 2a^2b + ab^2 + \cancel{b^3}}{(a-b)^2} = \frac{-ab(a-b)}{(a-b)^2} = \frac{-ab}{a-b} = \boxed{\frac{ab}{b-a}}$$

$$4) A = \frac{3^{2026} + 3^{2025}}{3^{2026} - 3^{2025}} = \frac{3^{2025} \times 3 + 3^{2025} \times 1}{3^{2025} \times 3 - 3^{2025} \times 1} = \frac{\cancel{3^{2025}} \times (3+1)}{\cancel{3^{2025}} \times (3-1)} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\boxed{A = 2 \times 3^0}$$

$$5) ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

par l'absurde, si $c \leq 0$, alors $ax^2 + bx = 0$, donc $x(ax+b) = 0$ et d'après le théorème du produit nul, $x = 0$ ou $ax+b=0$ (donc $x = -\frac{b}{a}$ car $a \neq 0$) donc cette équation aurait 0 comme solution, en contradiction avec la donnée cette équation admet deux racines réelles non nulles.

$$\text{Donc } \boxed{c \neq 0}.$$

$$b) x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{où} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$i) x_1 \times x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \stackrel{\text{IR3}}{=} \frac{(-b)^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \downarrow = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$ii) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \times x_2} \quad \text{avec} \quad x_2 + x_1 = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\boxed{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a} \times \frac{a}{c} = \boxed{-\frac{b}{c}}$$