Exercice I

1. A a trois lignes et trois colonnes, B a 3 lignes et deux colonnes, enfin C a trois lignes et une colonne (c'est un vecteur colonne à trois lignes).
2. Par exemple : $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. La trace de A est égale à 1 +1 +1 = 3.
4. AB existe car le nombre de colonne de A est 3 et ce dernier est égal au nombre de lignes de B (3)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

BA n'existe pas car le nombre de colonne de B (2) n'est pas égal au nombre de lignes de A (3).

AC existe car A a 3 colonnes et C a 3 lignes : $\boxed{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$

5. $E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

6.

2) $\boxed{M \times I_n \times M^{-1}} = M \times M^{-1} = \boxed{I_n}$; $2M \times (3M^{-1} - 5I_n) = 2 \times 3 \times \underbrace{M \times M^{-1}}_{I_n} - 2 \times 5 \times \underbrace{M \times I_n}_{M} = 6I_n - 10M$

$(M - I_n)(2M^{-1} + 3I_n) = M \times 2M^{-1} + M \times 3I_n - I_n \times 2M^{-1} - I_n \times 3I_n = 2\underbrace{MM^{-1}}_{I_n} + 3\underbrace{MI_n}_{M} - 2I_nM^{-1} - 3I_n^2$

$(M - I_n)(2M^{-1} + 3I_n) = 2I_n + 3M - 2M^{-1} - 3I_n$ $\quad (I_n^2 = I_n).$

$\boxed{(M - I_n)(2M^{-1} + 3I_n) = -I_n + 3M - 2M^{-1}.}$

Exercice II

$R = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$.

det(R) = $\cos(\theta) \times \cos(\theta) - \sin(\theta) \times (-\sin(\theta)) = cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$.

$1 \neq 0$, donc det(R) est non nul, par suite R est inversible, et d'après le cours :

$R^{-1} = \frac{1}{\det(R)} \times \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Exercice III

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$M^2 \overset{\text{Machine}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{M^2 = O_3}$.

2) Par l'absurde, supposons M inversible :

Comme $M^2 = O_3$, en prémultipliant les deux membres de cette égalité par M^{-1}, on aurait alors,

$$\underbrace{M^{-1} \times M^2}_{} = \underbrace{M^{-1} \times O_3}_{}$$

$M = O_3$: Ceci est absurde car M n'est pas vraiment la matrice nulle !
(aucun de ses coefficients n'est nul).

donc $\boxed{\text{M n'est pas inversible}}$.

Exercice IV

$a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

0) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + a \times \frac{1}{a} + a^2 \times \frac{1}{a^2} & a^2 \times \frac{1}{a} & a^2 \\ a \times \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \times a + a \times \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \times a^2 \\ \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \times a & \frac{1}{a^2} \times a^2 + \frac{1}{a} \times a \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix}}$$

; $-A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a^2 \\ -\frac{1}{a} & 0 & -a \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$; $-2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1)
donc $A^2 - A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2-0-2 & a-a & a^2-a^2 \\ \frac{1}{a}-\frac{1}{a} & 2-2 & a-a \\ \frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a}-\frac{1}{a} & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bref, $\boxed{A^2 - A - 2I_3 = O_3}$

2) D'après q.1, on a : $A^2 - A - 2I_3 = O_3$

Donc $A^2 - A = 2I_3$

Donc $\frac{A^2 - A}{2} = I_3$

donc $\frac{A(A-I)}{2} = I_3$, donc : $A \times \frac{A-I}{2} = I_3$: donc A est inversible

d'inverse $\boxed{A^{-1} = \frac{A-I}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -1 \end{pmatrix}}$

Exercice V

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ est magique car :

(Lignes) : 2 + 7 + 6 = **15** ; 9 + 5 + 1 = **15** ; 4 + 3 + 8 = **15.**

(Colonnes) **:** 2 + 9 + 4 = **15** ; 7 + 5 +3 = **15** ; 6 + 1 +8 = **15**

Diagonale principale : 2 +5 + 8 = **15** ; autre diagonale : 4 + 5 + 6 = **15.**

2*a*) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont deux matrices magiques d'ordre 2.

2*b*) Soit M = $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *une* matrice magique d'ordre 2. Alors on doit avoir (somme des coefficients de la première ligne égale à la somme des coefficients de la première colonne) : a + b = a +c, donc **b = c**.

De même (somme des coefficients de la première ligne égale à la somme des coefficients de la seconde colonne) : a +c = c +d, donc **a = d**.

Enfin, (somme des coefficients de chaque diagonale égaux) : **a+d = b+ c**, donc comme **a = d** et **b = c**, il vient que : **2a = 2b**, donc **a = b**, et par suite : **a = b = c = d**.
Par suite, M a <u>tous ses coefficients égaux</u>, M = $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ avec a réel quelconque.

Les matrices magiques d'ordre 2 sont celles ayant tous leurs coefficients égaux.

2*c*) D'après la question précédente, M est magique d'ordre 2, donc M = $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ avec a réel quelconque.
Par suite, det(M) = $a^2 - a^2 = 0$, donc M n'est pas inversible.

Ainsi aucune matrice magique d'ordre deux n'est inversible.

3a) A^{-1}= $\begin{pmatrix} \frac{71}{504} & \frac{-19}{126} & \frac{29}{504} \\ \frac{-17}{252} & \frac{1}{63} & \frac{25}{252} \\ \frac{-13}{504} & \frac{23}{126} & \frac{-55}{504} \end{pmatrix} = \frac{1}{504}\begin{pmatrix} 71 & -76 & 29 \\ -34 & 8 & 50 \\ -13 & 92 & -55 \end{pmatrix}$.

L_1 : $\frac{1}{504}(71-76+29) = \frac{24}{504}$ (inutile de simplifier ici).

L_2 : $\frac{1}{504}(-34+8+50) = \frac{24}{504}$

L_3 : $\frac{1}{504}(-13+92-55) = \frac{24}{504}$

C_1 : $\frac{1}{504}(71-34-13) = \frac{24}{504}$

C_2 : $\frac{1}{504}(-76+8+92) = \frac{24}{504}$

C_3 : $\frac{1}{504}(29+50-55) = \frac{24}{504}$

D_p : $\frac{1}{504}(71+8-55) = \frac{24}{504}$

D_{np} = $\frac{1}{504}(-13+8+29) = \frac{24}{504}$

Donc A^{-1} est également une matrice magique.

3b) Montrer que l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 3$ est stable par addition.

Soit C et D deux matrices magiques d'ordre *n* écrites de façon générale : C = (c_{ij}) et D = (d_{ij}) où *i* et *j* sont des entiers compris entre 1 et *n*.

Donc S = C+D est la matrice de terme général (s_{ij}), où s_{ij} = $c_{ij} + d_{ij}$.

Notons α la somme commune aux éléments de chaque ligne, colonne et diagonales de A, et β celle de B.

De part la définition de la somme de deux matrices, lorsqu'on fait la somme des éléments d'une quelconque ligne de S, on obtient $\alpha + \beta$, de même lorsqu'on fait la somme des éléments d'une quelconque colonne de S et pareil concernant la somme des éléments d'une quelconque diagonale de S.

Donc S est magique, et la somme de deux matrices magiques de même ordre est magique, donc l'ensemble des matrices magiques de même ordre est stable par addition.