

Exercice I

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.

On constate pour chaque heure n qu'en moyenne :

- 20 % des vélos présents à l'heure $n - 1$ à la station A sont toujours à cette station.
- 60 % des vélos présents à l'heure $n - 1$ à la station A sont à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- 10 % des vélos présents à l'heure $n - 1$ à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.

Partie A

Au bout de n heures, on note a_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et b_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

1. D'après le texte, on peut dire que, pour tout n : $\begin{cases} a_{n+1} = 0,2 a_n + 0,1 b_n \\ b_{n+1} = 0,6 a_n + 0,3 b_n \end{cases}$ avec $\begin{cases} a_0 = 50 \\ b_0 = 60 \end{cases}$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \iff U_{n+1} = M \times U_n \text{ où } M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$$

2. $U_1 = M \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 50 + 0,1 \times 60 \\ 0,6 \times 50 + 0,3 \times 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix}$

$$U_2 = M \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 16 + 0,1 \times 48 \\ 0,6 \times 16 + 0,3 \times 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$$

3. À la calculatrice, on trouve successivement : $U_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$, $U_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $U_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

C'est donc au bout de 5 heures qu'il ne reste qu'un seul vélo dans la station A.

Partie B

Le service décide d'étudier les effets d'un approvisionnement des stations A et B consistant à apporter après chaque heure de fonctionnement 30 vélos à la station A et 10 vélos à la station B.

Afin de conduire cette étude, il décide de modéliser la situation présente de la manière suivante :

Au bout de n heures, on note α_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et β_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions $V_{n+1} = M \times V_n + R$ avec $R = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - M$.

- a. On désigne par V une matrice colonne à deux lignes.

$$V = M \times V + R \iff V - M \times V = R \iff I \times V - M \times V = R \iff (I - M) \times V = R \iff N \times V = R$$

- b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$.

$$N \times V = R \iff N^{-1} \times N \times V = N^{-1} \times R \iff V = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} \iff V = \begin{pmatrix} 1,4 \times 30 + 0,2 \times 10 \\ 1,2 \times 30 + 1,6 \times 10 \end{pmatrix}$$

$$\iff V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$$

2. Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = V_n - V$.

a. $W_{n+1} = V_{n+1} - V$; or $V_{n+1} = M \times V_n + R$ et $V = M \times V + R$ donc, pour tout entier n :

$$W_{n+1} = M \times V_n + R - (M \times V + R) = M \times V_n + R - M \times V - R = M \times (V_n - V) = M \times W_n$$

b. On admet que : – pour tout entier naturel n , $W_n = M^n \times W_0$,

$$\text{– pour tout entier naturel } n \geq 1, M^n = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

$$W_0 = V_0 - V = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Pour tout n , $W_n = M^n \times W_0$ et pour tout $n \geq 1$, $M^n = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$; donc pour tout $n \geq 1$,

$$W_n = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 \times 6 + 0,1 \times 8 \\ 0,6 \times 6 + 0,3 \times 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On sait que, pour tout n , $W_n = V_n - V$ donc $V_n = W_n + V$.

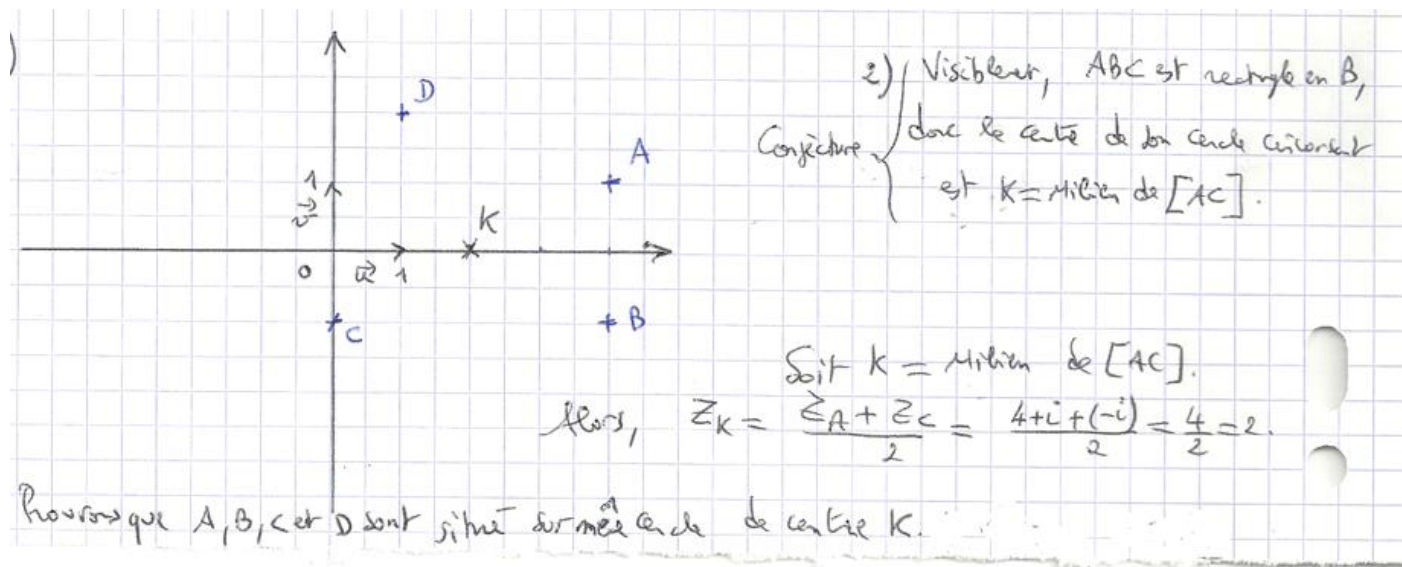
$$\text{Donc, pour tout } n \geq 1, V_n = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-1} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$

Le nombre de vélos va se stabiliser à 44 dans la station A et à 52 dans la station B.

Exercice II

0) et 1)



$$AC = |Z_C - Z_A| = |-i - (4+i)| = |-1-4-i| = |-4-2i| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}.$$

$$\text{donc } KA = KC = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

$$KB = |Z_B - Z_K| = |4-i-2| = |2-i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

$$KD = |Z_D - Z_K| = |1+2i-2| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Bref, $KA = KB = KC = KD = \sqrt{5}$, donc A, B, C, D sont situés sur le même cercle de centre $K(2)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.

3) $z \neq 2$, $M(z)$ et $M'(z')$ avec $z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$.

$$a) z_A' = \frac{iZ_A + 10 - 2i}{Z_A - 2} = \frac{i(4+i) + 10 - 2i}{4+i-2} = \frac{4i + i^2 + 10 - 2i}{2+i} = \frac{9+2i}{2+i}$$

$$\boxed{z_A'} = \frac{(9+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{18-9i+4i-2i^2}{2^2+1^2} = \frac{18-5i+2}{5} = \frac{20-5i}{5} = \boxed{4-i}$$

Rq : $A' = B$.

$$z_B' = \frac{iZ_B + 10 - 2i}{Z_B - 2} = \frac{i(4-i) + 10 - 2i}{4-i-2} = \frac{4i - i^2 + 10 - 2i}{2-i} = \frac{11+2i}{2-i}$$

$$\boxed{z_B'} = \frac{(11+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{22+2i^2+11i+4i}{5} = \frac{20+15i}{5} = \boxed{4+3i}$$

$$z_C' = \frac{i(-i) + 10 - 2i}{-i-2} = \frac{1+10-2i}{-2-i} = \frac{11-2i}{-2-i} = \frac{(11-2i)(-2+i)}{(2-i)(-2+i)} = \frac{-20+15i}{5}$$

$$\boxed{z_C'} = \boxed{-4+3i}$$

3b) $P(i)$

$$\begin{cases} A'P = |z_A' - z_P| = |4-i-i| = |4-2i| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} \\ B'P = |z_B' - z_P| = |4+3i-i| = |4+2i| = \sqrt{20} \quad (4+2i = \overline{4-2i}) \\ C'P = |z_C' - z_P| = |-4+3i-i| = |-4+2i| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} \end{cases}$$

Donc A', B', C' sont situés sur le même cercle de centre $P(i)$ et de rayon $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$$3c) |z' - i| = \left| \frac{iZ + 10 - 2i}{Z - 2} - i \right| = \left| \frac{iZ + 10 - 2i - i(Z - 2)}{Z - 2} \right|$$

$$|z' - i| = \left| \frac{iZ + 10 - 2i - iZ + 2i}{Z - 2} \right| = \left| \frac{10}{Z - 2} \right| = \frac{10}{|Z - 2|}$$

d) $M(z) \in \mathcal{C}$: donc $|z - 2| = \sqrt{5}$ car $MK = R = \sqrt{5}$.

$$\text{alors } |z' - i| \stackrel{3c)}{=} \frac{10}{|z - 2|} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

e) Si $M(z) \in \mathcal{C}$, alors $M'(z')$ vérifie, d'après la question précédente : $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.

Donc $|z'_M - z_P| = 2\sqrt{5}$, par suite, $M'P = 2\sqrt{5}$ et donc le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre $P(i)$ et de rayon $R = 2\sqrt{5}$.

On a donc établi que $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$
↗ inclus dans.

Exercice III

Soit A le point d'affixe $z_A = 2i$ et B celui d'affixe $z_B = -1$.

$$|z - 2i| = |z_M - z_A| = AM \quad \text{et} \quad |z + 1| = |z - (-1)| = |z_M - z_B| = BM.$$

Ainsi, $|z - 2i| = |z + 1|$ équivaut à $AM = BM$ ce qui équivaut à dire que M appartient à la médiatrice de $[AB]$. Cette dernière n'est donc pas perpendiculaire à la bissectrice car selon on

aurait $\arg(z_A) = \arg(z_B)$ c'est à dire $z = 0$: absurde.

Ainsi la proposition ① est fautive.

(E):

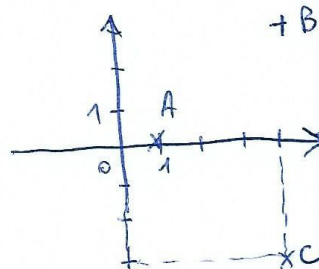
$$(z-1)(z^2+8z-25)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ \text{ou} \\ -z^2+8z-25=0 \rightarrow \text{équation du 2e degré avec } \begin{cases} a=-1 \\ b=8 \\ c=-25 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-25) = 64 - 100 = -36.$$

$$\Delta < 0, \text{ donc deux racines: } z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-8 - 6i}{-2} = 4 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 4 - 3i$$

donc $\boxed{J(E) = \{1; 4+3i; 4-3i\}}$.

Soit A(1); B(4+3i) et C(4-3i). Faisons un croquis:



Conjecture: ABC semble être rectangle en A.

Prouve: Méthode 1 (avec le produit scalaire).

$$z_{AB} = z_B - z_A = 4 + 3i - 1 = 3 + 3i, \text{ donc } \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$z_{AC} = z_C - z_A = 4 - 3i - 1 = 3 - 3i, \text{ donc } \vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Pour finir, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times 3 + 3 \times (-3) = 9 - 9 = 0$, donc $\vec{AB} \perp \vec{AC}$, donc $(AB) \perp (AC)$ et

ABC est un triangle rectangle en A; la proposition ② est vraie.

Méthode 2: Avec la réciproque du théorème de Pythagore.

$$AB = |z_B - z_A| = |3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3 - 3i| = |\overline{3 + 3i}| = |3 + 3i| = \sqrt{18}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |4 - 3i - (4 + 3i)| = |-6i| = 6$$

D'oe part: $BC^2 = 6^2 = 36$

D'autr part: $AB^2 + AC^2 = \sqrt{18}^2 + \sqrt{18}^2 = 18 + 18 = 36.$

Ainsi: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Donc d'après la réciproque du th. de Pythagore ABC est rectangle en A (et aussi l'inverse en A).

La proposition 2 est vraie -

$a \in \mathbb{R}, z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0.$

$\Delta = (2a)^2 - 4(a^2 + 1) = 4a^2 - 4a^2 - 4 = -4.$

$\Delta < 0$, donc l'équation a des solutions dans $\mathbb{C}$: $\begin{cases} z_1 = \frac{-2a - 2i}{2} = -a - i \\ z_2 = \overline{z_1} = -a + i \end{cases}$

Ainsi z_1 et z_2 ne sont pas réels car $\text{Im}(z_1)$ et $\text{Im}(z_2)$ sont égaux à -1 (respectivement 1).

de plus, $z_2 = \overline{z_1}$, donc $|z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1|.$

Ainsi: la proposition 3 est vraie.

Posons $z = a + bi$ où a, b sont des réels.

$|z|^2 = a^2 + b^2$

Ainsi: $z + |z|^2 = 7 + i \Leftrightarrow a + bi + a^2 + b^2 = 7 + i \Leftrightarrow \begin{cases} a + a^2 + b^2 = 7 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a + a^2 + 1 = 7 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a^2 + a - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$ (solutions réelles pour a).

$\mathcal{F} = \{-3 + i, 2 + i\}$: Proposition 4 VRAIE.

$z^2 + z + 1 = 0$: la résolution avec $\Delta = -3$ conduit à: $\begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$ car $\sqrt{-3} = \pm \sqrt{3}i$ (solutions complexes pour a).

$\mathcal{F} = \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$ et $\left| -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

La Proposition 5 est vraie -

Exercise IV

$$1) a \in \mathbb{C}^*; b \in \mathbb{C}^*$$

$$*) \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab} = \frac{a^2}{ab} + \frac{2ab}{ab} + \frac{b^2}{ab} = \frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a}.$$

$$\text{Or } |a|=|b|, \text{ donc } a = b e^{i\theta}, |b| \neq 0, \text{ donc } \frac{|a|}{|b|} = 1, \text{ donc } \left| \frac{a}{b} \right| = 1.$$

$$\text{Par suite, } \frac{a}{b} \in \mathbb{U}, \text{ donc } \frac{b}{a} \in \mathbb{U} \text{ car } \mathbb{U} \text{ est stable par inverses (cf. cours).}$$

$$\text{Aussi, par définition de } \mathbb{U}, \frac{a}{b} \times \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = 1 \text{ donc } \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} \text{ est l'inverse de } \frac{a}{b}, \text{ donc } \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a}.$$

$$\text{Par suite, } \boxed{\frac{(a+b)^2}{ab}} = 2 + \frac{a}{b} + \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \boxed{2 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right)} \text{ car } \forall z \in \mathbb{C}, z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z).$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{(a+b)^2}{ab} \in \mathbb{R}} \text{ (Somme de deux réels).}$$

$$**) \text{ Si } |a|=|b|=1: \text{ alors } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\text{Or (cf. cours), } \forall z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \text{ donc } \left| \operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) \right| \leq \left| \frac{a}{b} \right|, \text{ donc } \left| \operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) \right| \leq 1.$$

$$\text{Par suite, } -1 \leq \operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) \leq 1, \text{ donc } -2 \leq 2\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) \leq 2, \text{ donc } \underline{2 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0}.$$

$$\text{D'après (X), } \frac{(a+b)^2}{ab} = 2 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right), \text{ donc } \boxed{\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 0}$$

$$*** \text{ Preuve: Si } z = x + iy \text{ avec } x, y \text{ réels, } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } x = \operatorname{Re}(z).$$

$$\text{Or } x^2 + y^2 \geq x^2, \text{ donc par croissance de } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_+, \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} \text{ et } \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\text{Donc } \underline{|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|}.$$

réel
absolu
de x .

$$c) z \neq 0 \text{ par que } \frac{1}{z} \text{ existe. } \text{Caractérisation des réels à l'aide du conjugué.}$$

$$\left(z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z} = \overline{z + \frac{1}{z}}\right) \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) \text{ par propriété du conjugué}$$

$$\left(z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \left(z - \bar{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right) \Leftrightarrow \left(z - \bar{z} = \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}}\right) \Leftrightarrow \left(z - \bar{z} = \frac{z - \bar{z}}{|z|^2}\right)$$

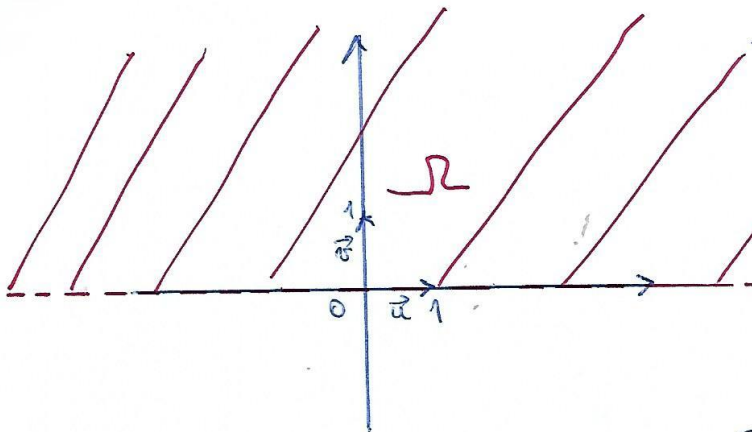
$$\left(z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow (z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \bar{z} \\ |z|^2 = 1 \end{cases} \text{ ou } 1 - \frac{1}{|z|^2} = 0$$

$$\left(z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} z = \bar{z} \\ z \neq 0 \end{cases} \text{ ou } |z|^2 = 1 \text{ (cf. positivité du module, } |z| = 1).$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\left(z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } |z| = 1} \quad (z = \bar{z} \text{ caractérisé les réels}).$$

Exercice V

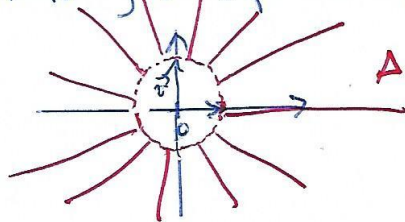
o)



Ω est le demi-plan situé au-dessus de l'axe des réels (partie de l'axe des réels).

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

$\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$ est le plan entier privé du disque de centre 0 et de rayon 1



a) $z \in \mathbb{R} \setminus \{2i\}$, donc $\text{Im}(z) > 0$ et $z \neq 2i$

Posons $z = a + ib$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et $(a, b) \neq (0, 2)$;

$$\left| \frac{z+2i}{z-2i} \right| = \left| \frac{a+(b+2)i}{a+(b-2)i} \right| = \frac{|a+(b+2)i|}{|a+(b-2)i|} = \frac{\sqrt{a^2+(b+2)^2}}{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}$$

Montrons que si $b > 0$, alors $a^2 + (b+2)^2 > a^2 + (b-2)^2$:

$$\text{Or } a^2 + (b+2)^2 = a^2 + b^2 + 4 + 4b \text{ et } a^2 + (b-2)^2 = a^2 + b^2 + 4 - 4b.$$

$$\text{Vu que } b > 0, \quad b > -b, \text{ donc } 4b > -4b, \text{ donc } \frac{a^2 + b^2 + 4 + 4b}{a^2 + (b+2)^2} > \frac{a^2 + b^2 + 4 - 4b}{a^2 + (b-2)^2} > 0 \quad \downarrow \text{ car } b \neq 2$$

Par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a : $\sqrt{a^2 + (b+2)^2} > \sqrt{a^2 + (b-2)^2} > 0$

Donc $\frac{\sqrt{a^2 + (b+2)^2}}{\sqrt{a^2 + (b-2)^2}} > 1$

donc $\left| \frac{z+2i}{z-2i} \right| > 1$, donc $\boxed{\frac{z+2i}{z-2i} \in \Delta}$.

$$b) f: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2i\} \rightarrow \Delta \\ z \mapsto f(z) = \frac{z+2i}{z-2i} \end{cases}$$

$$\text{Soit } b \in \Delta: f(z) = b \Leftrightarrow \frac{z+2i}{z-2i} = b \text{ et } z \neq 2i$$

$$f(z) = b \Leftrightarrow z+2i = b(z-2i) \text{ et } z \neq 2i$$

$$f(z) = b \Leftrightarrow z+2i = bz - 2bi \text{ et } z \neq 2i$$

$$f(z) = b \Leftrightarrow z(1-b) = -2i - 2bi = -2i(b+1) \text{ et } z \neq 2i$$

$$f(z) = b \Leftrightarrow z = \frac{-2i(b+1)}{1-b} = \frac{2(b+1)i}{b-1}$$

$b \neq 1$ car $b \in \Delta$, donc $\operatorname{Im}(b) > 0$ et si $b=1$, $\operatorname{Im}(b)=0$: absurde -

$$\boxed{\mathcal{J} = \left\{ \frac{2(b+1)i}{b-1} \right\}}$$

c) Montrons que $\operatorname{Im}\left(\frac{2(b+1)i}{b-1}\right) > 0$ sachant que $b \in \Delta$, donc $|b| > 1$:

$$\text{Or, } \frac{2(b+1)i}{b-1} = \frac{2(b+1)(\overline{b-1})i}{(b-1)(\overline{b-1})} = \frac{2(b+1)(\overline{b}-1)i}{|b-1|^2} = \frac{2(b+1)(\overline{b}-1)i}{|b-1|^2}$$

$$\frac{2(b+1)i}{b-1} = \frac{2i}{|b-1|^2} \times (b\overline{b} - b + \overline{b} - 1) = \frac{2i}{|b-1|^2} (|b|^2 - 1 + \overline{b} - b)$$

$$\text{Or } |b| > 1, \text{ donc } |b|^2 > 1^2 \text{ donc } |b|^2 - 1 > 0 \text{ et } \overline{b} - b = -2i \operatorname{Im}(b)$$

$$\text{alors } \frac{2(b+1)i}{b-1} = \frac{2i}{|b-1|^2} (|b|^2 - 1 - 2i \operatorname{Im}(b)) = \frac{4 \operatorname{Im}(b)}{|b-1|^2} + \frac{2(|b|^2 - 1)}{|b-1|^2} i$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\operatorname{Im}\left(\frac{2(b+1)i}{b-1}\right) = \frac{2(|b|^2 - 1)}{|b-1|^2}} \text{ avec } \begin{cases} |b|^2 - 1 > 0 \text{ car } |b| > 1. \\ 2 > 0 \\ |b-1|^2 > 0. \end{cases}$$

Ainsi (produit et quotient de réels > 0) on a: $\operatorname{Im}\left(\frac{2(b+1)i}{b-1}\right) > 0$, donc

$$\boxed{\frac{2(b+1)i}{b-1} \in \Omega} \text{ et de plus, si } \frac{2(b+1)i}{b-1} = 2i, \text{ alors } \frac{b+1}{b-1} = i$$

Donc $b+1 = i(b-1)$ ($b \neq 1$ car $|b| > 1$).

$$b+1 = ib - i$$

$$b(1-i) = -1-i$$

$$b = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-(1+i)^2}{2} = \frac{-(1+2i-1)}{2} = -i$$

et $|b| = |-i| = 1$: absurde car $b \in \Delta$, donc $|b| > 1$.

Ainsi $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \neq 2i$, donc $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{2i\}$. on $\omega = \frac{2(b+1)i}{b-1}$

d) L'axe des imaginaires pour prouver que z peut être vu comme l'ensemble suivant:

$$\Gamma = \{ki, k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\}.$$

Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$: calculons $f(ki)$:

$$f(ki) = \frac{ki+2i}{ki-2i} = \frac{(k+2)i}{(k-2)i} = \frac{k+2}{k-2} \text{ avec } \frac{k+2}{k-2} \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $f(\Gamma) \subset \mathbb{R}$. L'étude des variations de $\gamma: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \gamma(x) = \frac{x+2}{x-2}$ montre que
 les valeurs prises par γ appartiennent à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ainsi, $\boxed{f(\Gamma) \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}}$

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $f(z) = x \Leftrightarrow \frac{z+2i}{z-2i} = x \Leftrightarrow z+2i = (x-2i)z$ et $z \neq 2i$

$$f(z) = x \Leftrightarrow z+2i = xz - 2xi \text{ et } z \neq 2i$$

$$\Leftrightarrow z(1-x) = -2i - 2xi = -2i(x+1)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2i(x+1)}{1-x} = \frac{2(x+1)}{x-1}i, \text{ donc } z \in \Gamma \text{ et } \mathbb{R} \setminus \{1\} \subset f(\Gamma).$$

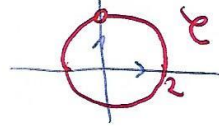
$$\frac{2(x+1)}{x-1} \neq 2 \text{ sinon } \frac{x+1}{x-1} = 1$$

et $-1=1$,
absurde.

Ainsi, $\boxed{f(\Gamma) = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$.

⚡: pour la réciproque, sans refaire le calcul, on aurait pu utiliser q6)!

e) Soit $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} \mid |z|=2\}$.



Soit $M(z) \in \mathcal{C} : |z|=2$ et $z \neq 2i$

Considérons $f(z) = \frac{z+2i}{z-2i}$

$$2 \in \mathcal{C} \text{ et } f(2) = \frac{2+2i}{2-2i} = \frac{2(1+i)}{2(1-i)} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

$$-2 \in \mathcal{C} \text{ et } f(-2) = \frac{-2+2i}{-2-2i} = \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{(1+i)(-1+i)}{2} = \frac{1-i-i-1}{2} = -i$$

$$-2i \in \mathcal{C} \text{ et } f(-2i) = 0$$

Ces quelques calculs d'image par f d'éléments de $\mathcal{C}$ permettent de conjecturer que $f(\mathcal{C}) \subset i\mathbb{R}$.

Soit z tel que : $|z|=2$ et $z \neq 2i$. Montrons $f(z) \in i\mathbb{R}$ en montrant par exemple que

$$\operatorname{Re}(f(z)) = 0. \quad \text{Or } f(z) = \frac{z+2i}{z-2i} = \frac{(z+2i)(\bar{z}+2i)}{(z-2i)(\bar{z}+2i)} \quad (!) \quad \overline{z-2i} = \bar{z} - 2i = \bar{z} + 2i$$

$$f(z) = \frac{z\bar{z} + 2i(z+\bar{z}) - 4}{|z-2i|^2} = \frac{|z|^2 - 4 + 2i(z+\bar{z})}{|z-2i|^2} = \frac{2i(z+\bar{z})}{|z-2i|^2} \quad \text{car } |z|=2 \text{ donc } |z|^2 - 4 = 0$$

$$f(z) = \frac{2i \times 2 \operatorname{Re}(z)}{|z-2i|^2} = \frac{4 \operatorname{Re}(z)i}{|z-2i|^2} : \text{ Ainsi } f(z) \in i\mathbb{R}$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$\text{et } \boxed{f(\mathcal{C}) \subset i\mathbb{R}}$$

Exercice facultatif

1) Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et f définie sur $\mathbb{C}$ par: $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b$.

f est une isométrie de $\mathbb{C}$ ssi: $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |f(z) - f(z')| = |z - z'|$ c'est à dire:

$$f \in \text{Iso}(\mathbb{C}) \iff |az + b - (az' + b)| = |z - z'|$$

$$\iff |a(z - z')| = |z - z'|$$

$$\iff |a| \cdot |z - z'| = |z - z'|$$

$$\iff |z - z'| \cdot (|a| - 1) = 0$$

$$\iff \underbrace{|z - z'| = 0}_{\text{impossible car } z, z' \text{ sont qql et } |z - z'| = 0 \text{ équivaut à } z = z'} \text{ ou } \underbrace{|a| - 1 = 0}_{|a| = 1}$$

$$\iff |a| = 1$$

Conclusion: $z \mapsto az + b$ est une isométrie de $\mathbb{C}$ équivaut à: $a \in \mathbb{U}$

Le même raisonnement (compte tenu du fait que $|\bar{z}| = |z|$) conduit à: $z \mapsto a\bar{z} + b$ est une isométrie de $\mathbb{C}$ équivaut à: $a \in \mathbb{U}$.

2) $g \in \text{Iso}(\mathbb{C})$ et $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

a) soit $M(z)$; $O(0)$; $U(1)$.

On va établir que si g admet un troisième point fixe (non réel), alors $g = \text{Id}_{\mathbb{C}}$ (c.à.d. $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = z$). Il faut de la culture géométrique pour avoir cette intuition.

S'il existe $w \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $g(w) = w$, soit W le point d'affixe w :

g est une isométrie de $\mathbb{C}$, donc $\forall z \in \mathbb{C}, |g(z) - \underbrace{g(0)}_0| = |z - 0|$

$$\text{donc } OM' = OM \text{ où } M'(g(z)). \quad |g(z)| = |z| \quad \text{donc } O \in \text{Med}[MM']$$

$$\text{de même: } |g(z) - \underbrace{g(1)}_1| = |z - 1|, \text{ donc } UM' = UM : U \in \text{Med}[MM']$$

$$\text{Comme } O \neq U, \text{ on a: } (OU) = \text{axe des } \mathbb{R} = \text{Med}[MM']$$

$$\text{de même: } |g(z) - \underbrace{g(w)}_w| = |z - w|, \text{ donc } M'W = MW : W \in \text{Med}[MM']$$

2a) $g \in \text{Iso}(\mathbb{C})$; $g(0)=0$; $g(1)=1$.

Soient $O(0)$; $U(1)$ et $M(z)$ et $M'(g(z))$.

Montrons d'abord que si g a trois points fixes non alignés (i.e. 0, 1 et un autre point fixe non aligné)
alors $g = \text{Id}_{\mathbb{C}}$ (c.a.d. $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = z$).

Soit $C(w)$ où $w \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ tel que $g(w) = w$: Ainsi g a trois points fixes non alignés. Supposons $\exists z \in \mathbb{C}, g(z) \neq z$: (i.e. $M' \neq M$) : on raisonne par l'absurde par $mg \neq \text{Id}_{\mathbb{C}}$.

$$\begin{cases} |g(z) - g(0)| = |z - 0|, \text{ donc } |g(z)| = |z|, \text{ donc } OM' = OM, \text{ donc } O \in \text{Med}[MM'] \\ |g(z) - g(1)| = |z - 1|, \text{ donc } |g(z) - 1| = |z - 1|, \text{ donc } UM' = UM, \text{ donc } U \in \text{Med}[MM'] \\ |g(z) - g(w)| = |z - w|, \text{ donc } |g(z) - w| = |z - w|, \text{ donc } CM' = CM, \text{ donc } C \in \text{Med}[MM'] \end{cases}$$

En suite; O, U, C devraient alignés sur la médiatrice de $[MM']$ en contradiction avec O, U et C non alignés.

alors Si g a trois points fixes non alignés, alors $g = \text{Id}_{\mathbb{C}}$. (Réciproque triviale également).
(#)

Si g n'a pas trois points fixes non alignés : Montrons que $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = \bar{z}$.

Avec les notations précédentes : Soit $M(z)$ tel que $M'(g(z))$ soit distinct de M et $M \notin (OU)$.

Considérons $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto h(z) = \sigma_{(ou)} \circ g(z)$$

où $\sigma_{(ou)}(z) = \bar{z}$: $\sigma_{(ou)}$ est la symétrie p/r à la droite OU .
 $\forall z \in \mathbb{C}, \sigma_{(ou)}(z) = \bar{z}$.

$$h(0) = \sigma_{(ou)}(g(0)) = \sigma_{(ou)}(0) = \bar{0} = 0$$

$$h(1) = \sigma_{(ou)}(g(1)) = \sigma_{(ou)}(1) = \bar{1} = 1$$

$$h(z) = \sigma_{(ou)}(g(z)) = \sigma_{(ou)}(z') \text{ où } z' = g(z).$$

de plus g est une isométrie qui fixe O et U , donc $OM = OM'$ et $UM = UM'$, donc (OU) est la médiatrice de $[MM']$: Ainsi $h = \sigma_{(ou)} \circ g$ a trois points fixes O, U et M avec O, U, M non alignés donc d'après (#), $h = \text{Id}_{\mathbb{C}}$, donc $\sigma_{(ou)} \circ g = \text{Id}_{\mathbb{C}}$ donc

$\sigma_{(ou)}(g(z)) = z$ donc $g(z) = \bar{z}$.

$$\underbrace{\sigma_{(0,1)} \circ \sigma_{(0,1)}}_{\text{Id}_{\mathbb{C}}} \circ g = \sigma_{(0,1)} \circ \text{Id}_{\mathbb{C}}$$

Id $_{\mathbb{C}}$ (correspond à 2 réflexions d'axe l'axe des réels (correspond à $\overline{\overline{z}} = z$)).

$$\text{Donc } \underbrace{\text{Id}_{\mathbb{C}} \circ g}_g = \underbrace{\sigma_{(0,1)} \circ \text{Id}_{\mathbb{C}}}_{\sigma_{(0,1)}}$$

$$g = \sigma_{(0,1)}$$

$$\text{Donc } \forall z \in \mathbb{C}, g(z) = \sigma_{(0,1)}(z) = \overline{z}$$

2b) Si $g(i) = i$ alors g a trois points fixes non alignés ^{différents} (0, 1 et i), donc $g = \text{Id}_{\mathbb{C}}$

(Autre façon : $\boxed{g(i) = i}$, alors d'après 2a), on a $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = z$ ou $g(z) = \overline{z}$
on ne peut pas avoir $g(z) = \overline{z}$ sinon $g(i) = \overline{i} = -i$. donc $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = z}$.)

de même, $\boxed{g(i) = -i}$, alors d'après 2a) : $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = z$ est impossible sinon $g(i) = i$

Donc $i = -i$ et $i = 0$: absurde. $\downarrow$ donc $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = \overline{z}}$

3) $f \in \text{Iso}(\mathbb{C})$ donc $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, |f(z) - f(z')| = |z - z'|$.

a) Montrons d'abord que $f(1) - f(0) \neq 0$: car l'absurde, si $f(1) - f(0) = 0$, alors :

$$|f(1) - f(0)| = |1 - 0|, \text{ donc } |0| = |1| : 0 = 1 : \text{absurde!}$$

$f \in \text{Iso}(\mathbb{C})$

donc $f(1) - f(0) \neq 0$, il est donc légitime de définir la fonction motée γ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \gamma(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)}$$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |\gamma(z) - \gamma(z')| = \left| \frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)} - \frac{f(z') - f(0)}{f(1) - f(0)} \right| = \left| \frac{f(z) - f(z')}{f(1) - f(0)} \right|$$

Par propriété de modules : $|\gamma(z) - \gamma(z')| = \frac{|f(z) - f(z')|}{|f(1) - f(0)|} = \frac{|z - z'|}{|1 - 0|} = |z - z'|$
 car $f \in \text{Iso}(\mathbb{C})$.

donc $\boxed{\gamma \in \text{Iso}(\mathbb{C})}$

3b) Observons que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$: $\gamma \in \text{Iso}(\mathbb{C})$ et a deux points fixes 0 et 1.

Après la q.2 a) :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \gamma(z) = z \quad \text{ou} \quad \gamma(z) = \bar{z}$$

$$\frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)} = z \quad \text{ou} \quad \frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)} = \bar{z}$$

$$f(z) - f(0) = (f(1) - f(0))z \quad \text{ou} \quad f(z) - f(0) = (f(1) - f(0))\bar{z}$$

$$f(z) = \underbrace{(f(1) - f(0))}_a z + \underbrace{f(0)}_b \quad \text{ou} \quad f(z) = \underbrace{(f(1) - f(0))}_a \bar{z} + \underbrace{f(0)}_b$$

donc $\boxed{f(z) = az + b}$

ou $\boxed{f(z) = a\bar{z} + b}$