Maths Expertes Groupe 2 **Corrigé du DM8** **Avril 2025**

Exercice I

18 page 79 :

a) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\times 3} - \sqrt{2}}{4}$

$$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}$$

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2\times 3}}{4}$

$$\boxed{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)}$$

b) $2 \times \frac{5\pi}{24} = \frac{5\pi}{12}$.

D'une part : $\cos\left(2 \times \frac{5\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

Donc : $2\cos^2\left(\frac{5\pi}{24}\right) - 1 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{8}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2} + 4\right)$

De plus, $\frac{5\pi}{24} \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ donc : $\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right) > 0$

Donc : $\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}+4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}+4}$

$$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+8}}$$

D'autre part : $\cos\left(2\times\frac{5\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Donc : $1-2\sin^2\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

Or, $\frac{5\pi}{24} \in]0;\pi[$ donc : $\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right) > 0$.

Par suite : $\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+4-\sqrt{6}}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{2(\sqrt{2}+4-\sqrt{6})}$$

Ainsi : $\boxed{\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}+8}}$

<u>34 page 80</u>

$\forall k \in [\![1;4]\!]$, $P_k(p_k)$

Graphiquement : $|p_1| = 2$ et $\mathrm{Re}(p_1) = 1$ donc : $\cos\theta = \frac{1}{2}$ avec $\theta = \arg(p_1)\,[2\pi]$,
Or, $\mathrm{Im}(p_1) > 0$ et $|p_1| > 0$ donc $\sin(\theta) > 0$ car : $\theta = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ donc : $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$
Donc : $\boxed{p_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

De même : $p_2 = 4 = 4\times 1$.

$$\boxed{p_2 = 4e^{i0}}$$

$|p_3| = 2$ et $\arg(p_3) = \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$.

Donc : $\boxed{p_3 = 2e^{3i\frac{\pi}{4}}}$

$|p_4| = 2$ et $\arg(p_4) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Donc : $\boxed{p_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

42 page 80 :

b) $|(1-i\sqrt{3})^2| = |1-i\sqrt{3}|^2 = 4$

$\arg((1-i\sqrt{3})^2) = 2\arg(1-i\sqrt{3}) = -2\times\frac{\pi}{3}$

Donc : $\boxed{(1-i\sqrt{3})^2 = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4e^{-2i\frac{\pi}{3}}}$

30 page 81 :

$z = 3e^{-i\frac{\pi}{10}}$

$z' = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$

Donc : $\boxed{zz'} = 18e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{10}\right)} = \boxed{18e^{i\frac{3\pi}{20}}}$

$\boxed{\frac{z}{z'}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{10}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{10}\right)} = \boxed{\frac{1}{2}e^{-i\frac{7\pi}{20}}}$

$\boxed{z^5} = 3^5e^{-5i\frac{\pi}{10}} = \boxed{243e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

81 page 81 : $z = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$

a) $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$\boxed{z = -\sqrt{2}(1+i)}$

b) $z = -2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}$.

$\boxed{z = 2e^{5i\frac{\pi}{4}}}$

c) $\boxed{A} = z^8 = 2^8 e^{8\times\frac{5i\pi}{4}} = 256\, e^{10i\pi} = \boxed{256}$

$\boxed{B} = (z+\bar{z})^2 = (2\operatorname{Re}(z))^2 = 4(-\sqrt{2})^2 = \boxed{8}$

$\boxed{C} = (z+i\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2})^2 = \boxed{2}$

<u>100 page 88 :</u>

$P = e^{i\frac{\pi}{14}} \times e^{i\frac{\pi}{7}} \times e^{i\frac{3\pi}{14}} \times e^{i\frac{2\pi}{7}} \times e^{i\frac{5\pi}{14}} \times e^{i\frac{3\pi}{7}} = e^{i\left(\frac{\pi}{14}+\frac{3\pi}{14}+\frac{5\pi}{14}\right)} \times e^{i\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}+\frac{3\pi}{7}\right)}$

$P = e^{i\frac{9\pi}{14}} \times e^{i\frac{6\pi}{7}} = e^{i\left(\frac{9\pi}{14}+\frac{12\pi}{14}\right)} = e^{i\frac{21\pi}{14}} = e^{i\left(\pi+\frac{7\pi}{14}\right)} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = -e^{i\frac{\pi}{2}}$

$P = -i$

donc : $\boxed{e^{i\frac{\pi}{14}} \times e^{i\frac{\pi}{7}} \times e^{i\frac{3\pi}{14}} \times e^{i\frac{2\pi}{7}} \times e^{i\frac{5\pi}{14}} \times e^{i\frac{3\pi}{7}} = -i}$

<u>69 page 82 :</u>

D'une part : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x)\sin^2(x) = \dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} \times \dfrac{(e^{ix}-e^{-ix})^2}{-4}$

$\cos(2x)\sin^2(x) = (e^{2ix}+e^{-2ix})(e^{2ix}-2+e^{-2ix}) \times -\frac{1}{8}$

$\cos(2x)\sin^2(x) = -\frac{1}{8}(e^{4ix}-2e^{2ix}+1+1-2e^{-2ix}+e^{-4ix})$

(*) $\cos(2x)\sin^2(x) = -\frac{1}{8}(e^{4ix}+e^{-4ix}-2e^{2ix}-2e^{-2ix}+2)$

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R},\ -\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4} = -\dfrac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{8} + \dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{4} - \dfrac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(e^{4ix}+e^{-4ix}-2e^{2ix}-2e^{-2ix}+2)$

Donc d'après (*) : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x)\sin^2(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}}$

Soit F une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \cos(2x)\sin^2(x)$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2x)\sin^2(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{16} \times 4\cos(4x) + \frac{1}{4} \times 2\cos(2x) - \frac{1}{4}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F(x) = -\frac{1}{16}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{4}x}$

Exercice II

Notons (E) l'équation : cos(2x) = sin(x).

Voici une première méthode de résolution :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \sin(x) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2(x) = \sin(x)$

Donc : (E) : $-2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$.

Posons $X = \sin(x)$

Par conséquent : $X \in [-1 ; 1]$.

Il vient que $2X^2 + X - 1 = 0$.

-1 est solution évidente de cette équation, donc la deuxième solution est : $\frac{1}{2}$

Donc : $\sin(x) = -1$ ou $\sin(x) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $x = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $x = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

Par conséquent : $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E) = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$

Sur $I =]-\pi ; \pi]$, $\sin(x) \geqslant 0$ donc : $\sin(x) \neq -1$.

Par conséquent : $\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

Ainsi : $\boxed{\mathcal{S}_I(E) = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\}}$

Voici une seconde méthode de résolution qui évite l'équation du second degré :

Pour tout réel x, sin(x) = cos($\frac{\pi}{2} - x$), donc l'équation (E) s'écrit aussi : cos(2x) = cos($\frac{\pi}{2} - x$).

Cette dernière (de la forme du cours cos(X)=cos(a)) est équivalente à :

$2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$ ou $2x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

3x = $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou x = $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

x = = $\frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$ ou x = $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

On obtient le même ensemble de solution pour (E) car lorsque k est entier, $\frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$ prend pour mesure principale respectivement : $\frac{\pi}{6}$ (k=0) ; $\frac{5\pi}{6}$ $(k = 1)$, et $-\frac{\pi}{2}$ $(k = -1)$.

La conclusion est la même qu'à la méthode 1 si on se restreint à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ des mesures principales.

Exercice III

$z_0 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$

1- a) $\left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \sqrt{1 + \frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Soit $\theta = \arg\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ donc : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Donc : $\boxed{1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}}$

b) $\boxed{z_1} = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}}$

$\boxed{z_2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \boxed{\frac{4}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}}$

2- a) (z_n) est une suite géométrique.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = z_0 \times q^n$

$z_n = 1 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n$

$\boxed{z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}}$

b) Les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si l'affixe de A_n est réel car celles de O et A_0 le sont.

Or l'affixe de A_n est : z_n.

Donc : $z_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z_n) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow n\frac{\pi}{6} = 0\ [\pi] \Leftrightarrow n\frac{\pi}{6} = k\pi$ avec

$z_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{n = 6k}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, les point O, A_0, A_n sont alignés si et seulement si <u>n est un multiple de 6</u>.

3) $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = |z_{n+1} - z_n| = A_n A_{n+1}$.

Par suite, (d_n) représente la distance entre 2 points successifs dont l'affixe est caractérisée par (z_n).

b) $\boxed{d_0} = |z_1 - z_0| = \left|i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1} - z_{n+1}$

$z_{n+2} - z_{n+1} = z_{n+1}\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)}$$

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right|$

$d_{n+1} = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| \times |z_{n+1} - z_n| = \frac{2}{\sqrt{3}}\, d_n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{d_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, d_n}$

Par suite (d_n) est géométrique de raison $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = d_0 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$

$$\boxed{d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}$$

4-a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{|z_n|^2} = z_n \times \bar{z}_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}} = \boxed{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}}$

Donc : $|z_n|^2 + d_n^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

de plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ |z_{n+1}|^2 = z_{n+1} \times \overline{z_{n+1}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2}$

4-b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$

$OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2$ par déf de (d_n)

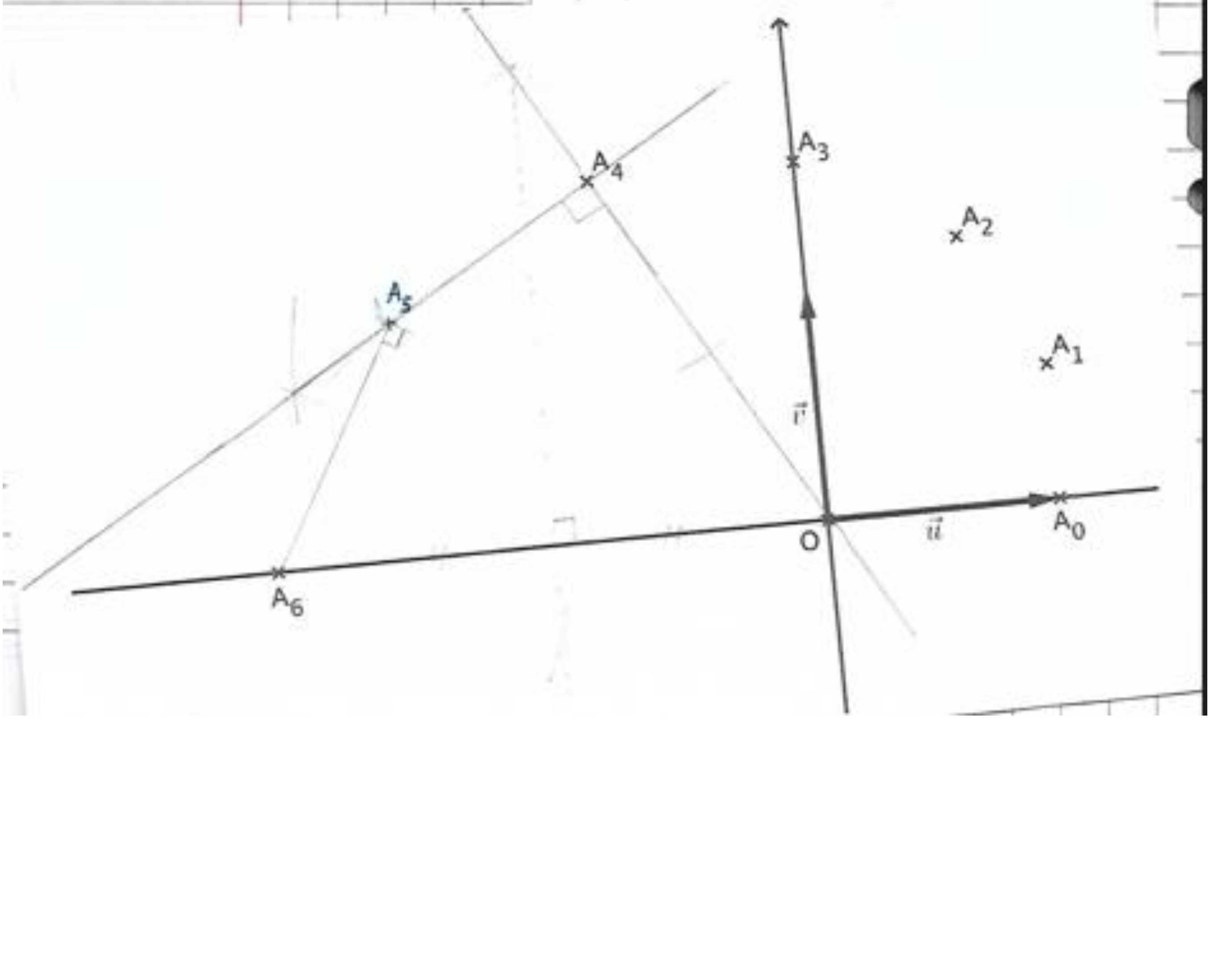
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, pour tout n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

4-c) voir Annexe.

4-d) D'après 4-b), le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4, donc A_5 se trouve sur la perpendiculaire à (A_4O) passant par A_4.

De plus, le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_5, donc A_5 se trouve sur le cercle de centre I et de rayon OI où I désigne le milieu du segment $[OA_6]$.

A_5 est donc l'intersection entre la perpendiculaire précédente et le cercle.



BONUS

$\theta \in \mathbb{R}$

$$C+iS = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)\right)}_{= e^{ik\theta}}$$

$$C+iS = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k.$$

Or $e^{i\theta} = 1 \iff \theta = 2p\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$. (Si vous ne le voyez pas, écrire : $\cos(\theta)+i\sin(\theta)=1$ qui équivaut à : $\begin{cases}\cos(\theta)=1\\ \sin(\theta)=0\end{cases}$ ...)

<u>Si θ est un multiple de 2π</u> : alors $e^{i\theta}=1$ et $C+iS = \sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1$.

Par identification des parties réelles et imaginaires dans l'égalité précédente, on aboutit à :

$$\boxed{C = n+1 \quad \text{et} \quad S = 0}$$

<u>Si θ n'est pas un multiple de 2π</u> : ($e^{i\theta} \neq 1$)

$$C+iS = \overbrace{\sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k}^{\text{somme des termes d'une suite géométrique de raison } q = e^{i\theta} \text{ avec } q\neq 1} = \frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-e^{i\theta}}$$

Technique arc moitié

$$C+iS = \frac{e^{i\frac{\theta(n+1)}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta(n+1)}{2}} - e^{i\theta\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right)} = \frac{-2i\, e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}} \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{-2i\, e^{\frac{i\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Formule d'Euler :

$x \in \mathbb{R}$: $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

donc $e^{-ix} - e^{ix} = -2i\sin(x)$

$$C+iS = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\left(\frac{\theta(n+1)}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$\boxed{C+iS = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\frac{n\theta}{2}}}$$

Or $e^{\frac{in\theta}{2}} = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$.

donc $C + iS = \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}_{\text{réel}} \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right)$

$$C + iS = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i\,\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

<u>Par identification:</u>

$$\boxed{\underbrace{C}_{=C(\theta)} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \underbrace{S}_{=S(\theta)} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

3) $u_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(k)$. on <u>fixe $\theta = 1$</u> dans la formule donnant C de <u>la question 1</u>.

$u_n = C(1) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\cos\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq 1$ et $|\cos(x)| \leq 1$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = \frac{\left|\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\cos\left(\frac{n}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right|} \leq \underbrace{\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}}_{=\text{constante } \lambda \text{ indépendante de } n}$. $\sin\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ car $\frac{1}{2} \in]0;\pi[$ et $\sin(x) > 0$ sur $]0;\pi[$.

Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est bornée}}$

2) Même principe que 1) avec $q = \cos(\theta)e^{i\theta}$ ---- Calculs bourrins -

Ici, $q = 1 \iff \cos^2(\theta) = 1$ et $\cos(\theta)\sin(\theta) = 0$ ---- $\iff \theta \in \underbrace{\pi\mathbb{Z}}_{\text{multiple de } \pi}$.

4)

$\theta \in]-\pi ; \pi[$, donc $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$.

Par suite, $x = \frac{-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ existe et $x = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Vu que x est exprimé en fonction de $\frac{\theta}{2}$ on peut raisonnablement avoir l'idée de déplier le cos et le sin.

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \\ \sin(\theta) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

$$e^{i\theta} = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 + 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

On divise les deux membres par $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (licite car $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$ vu que $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$)

$$\frac{e^{i\theta}}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 + 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2 - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 2i\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}}_{= -x} = 2 - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - 2ix$$

Enfin : $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2(\theta/2)} + \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

OR $x = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, donc $x^2 = \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, et par suite : $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 1 + x^2$.

Ainsi : $e^{i\theta}(1+x^2) = 2 - (1+x^2) - 2ix) = 1 - x^2 - 2ix$

$$\boxed{e^{i\theta} = \frac{1 - x^2 - 2ix}{1+x^2} = \frac{-x^2+1}{x^2+1} - \frac{2xi}{x^2+1}}$$

#J'ai eu ma dose de trigo !