Exercice I

1) Résolvons l'équation suivante : $z^4+z^2-1=0$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$:

Posons $Z=z^2$ donc $Z^2=(z^2)^2=z^4$ Oui

L'équation $z^4+z^2-1=0$ s'écrit donc :

$$Z^2+Z-1=0$$

On a donc une équation du 2nd degré de la forme : $aZ^2+bZ+c=0$ avec $a=1$; $b=1$ et $c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times(-1)$ Oui

$\Delta=1+4=5$

$\Delta>0$, donc l'équation $Z^2+Z-1=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} Z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt5}{2\times1}=\dfrac{-1+\sqrt5}{2} \\ \text{et} \\ Z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt5}{2\times1}=\dfrac{-1-\sqrt5}{2} \end{cases}$$

Repassons à z^2

on a $Z=z^2$

Donc on a : $(z_1)^2=\dfrac{-1+\sqrt5}{2}$ et $(z_2)^2=\dfrac{-1-\sqrt5}{2}$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ ces deux équations :

$(z_1)^2=\dfrac{-1+\sqrt5}{2}$ or $\dfrac{-1+\sqrt5}{2}\approx 0{,}62$ donc $\dfrac{-1+\sqrt5}{2}>0$

donc : $z_1=\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt5}{2}}$ ou $z_1=-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt5}{2}}$ Oui

$z_1=\dfrac{\sqrt2\left(\sqrt{-1+\sqrt5}\right)}{2}$ ou $z_1=-\dfrac{\sqrt2\left(\sqrt{-1+\sqrt5}\right)}{2}$

et $(z_2)^2=\dfrac{-1-\sqrt5}{2}$ or $\dfrac{-1-\sqrt5}{2}\approx -1{,}62$ donc $\dfrac{-1-\sqrt5}{2}<0$

Donc $(z_2)^2=\dfrac{-1-\sqrt5}{2}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ Bien

Donc $z^4+z^2-1=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont $\frac{-\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2}$

Résolvons donc cette équation dans $\mathbb{C}$.

$Z^2+Z-1=0$ admet de nouveau deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont : $Z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Or $Z=z^2$

Donc on a $(z_1)^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $(z_2)^2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Résolvons ces deux équations dans $\mathbb{C}$:

$(z_1)^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ admet les deux mêmes solutions que dans $\mathbb{R}$.

Donc on a de nouveau : $z_1=\frac{-\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2}$ et $z_1'=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2}$

De plus, $(z_2)^2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ admet des solutions dans $\mathbb{C}$, calculons ces solutions.

$$(z_2)^2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$(z_2)^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\times(-1)$$

$$(z_2)^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)i^2$$

Bien

$$(z_2)^2=\left(i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^2$$

$$(z_2)^2-\left(i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^2=0$$

$$\left(z_2-i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(z_2+i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)=0$$

oui

On a un facteur de produit nul.
Donc on obtient :

$$z_2 - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 0 \quad \text{ou} \quad z_2 + i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 0$$

$$z_2 = i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{ou} \quad z_2 = -i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\boxed{z_2 = i\,\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)}{2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{z_2 = -i\,\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)}{2}}$$

Ainsi, l'équation $z^4 + z^2 - 1 = 0$ admet quatre solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont : $i\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)}{2}$; $-i\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2}$

Donc $\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2} ; \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2}\right\}}$ Bien

et

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2} ; \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2} ; -i\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)}{2} ; i\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)}{2}\right\}}$$ Oui

2) On a l'équation $z^2 + mz + 13 = 0$ définie dans $\mathbb{C}$.
On veut que $3-2i$ soit une solution dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
Donc on considère que $z = 3-2i$
On cherche à déterminer le réel m
Donc on résout l'équation suivante d'inconnue m :

$$z^2 + mz + 13 = 0 \text{ avec } z = 3-2i$$

donc : $(3-2i)^2 + m(3-2i) + 13 = 0$

$$9 - 12i - 4 + 3m - 2mi + 13 = 0$$

$$\underbrace{(18+3m)}_{\text{partie réelle}} + \underbrace{(-12-2m)}_{\text{partie imaginaire}}\,i = 0$$

Or un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont égales à 0.
On obtient donc les équations suivantes:

$18+3m=0$ et $-12-2m=0$

$3m=-18$ et $-2m=12$

$m=\frac{-18}{3}$ et $m=\frac{12}{-2}$

$m=-6$ et $m=-6$

$S=\{-6\}$

Oui Ainsi pour que $3-2i$ soit solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2+mz+13=0$, il faut que m soit égal à -6

3) On a : a, b et c des réels non nuls
De plus, on a l'équation $az^2+bz+c=0$ qui a 2 solutions distinctes
C'est une équation du 2nd degrés de la forme
$az^2+bz+c=0$
Calculons Δ:
$\Delta=b^2-4ac$
Or on suppose que $az^2+bz+c=0$ admet deux solutions donc Δ ne peut pas être égal à 0. Oui
Procédons par disjonction de cas: TBien
• si $\Delta>0$, alors deux solutions:

$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Ainsi, on a : $a(z_1-z_2)^2=a\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}-\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)^2$

$a(z_1-z_2)^2=a\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$

$a(z_1-z_2)^2=a\left(\frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$

$$a(z_1-z_2)^2 = a\left(\frac{-\sqrt{\Delta}}{a}\right)^2$$

Oui

$$a(z_1-z_2)^2 = a \times \frac{\Delta}{a^2}$$

$$a(z_1-z_2)^2 = \frac{\Delta}{a} = \frac{b^2-4ac}{a}$$

Oui donc

$$(a(z_1-z_2))^2 = \Delta$$

• Si $\Delta < 0$ alors deux solutions :

. $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Donc on a : $a(z_1-z_2)^2 = a\left(\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} - \left(\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\right)^2$

$$a(z_1-z_2)^2 = a\left(\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} + \frac{b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2$$

$$a(z_1-z_2)^2 = a\left(\frac{2i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2$$

$$a(z_1-z_2)^2 = a\left(\frac{i\sqrt{|\Delta|}}{a}\right)^2$$

$a\,(z_1 - z_2)^2 = a \times \frac{i^2 \times |\Delta|}{a^2} = a \times \frac{(-1)\times(-\Delta)}{a^2} = \frac{\Delta}{a}$ car $|\Delta| = -\Delta$ vu que Δ *est un réel négatif*.

Par suite, on a encore : $\boxed{\Delta} = a^2\,(z_1 - z_2)^2 = \boxed{\mathbf{(a(z_1 - z_2))^2}}$

L'écriture $\Delta = (a(z_1 - z_2))^2$ donne une expression de delta en fonction des racines de l'équation.

On a ici une relation réciproque : dans le cours, on a exprimé les racines de l'équation en fonction de Δ, ici on a exprimé Δ en fonction des racines !

<u>Exercice II</u>

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les 16 produits suivants : I^2, IJ, IK, IL, JI, J^2, JK, JL, KI, KJ, K^2, KL, LI, LJ, LK et L^2.

<u>Aucune difficulté</u> : $I^2 = I$; IJ = J ; IK = O_2 ; IL = O_2 ; JI = O_2 ; $J^2 = O_2$; JK = I ; JL = J ; KI = K

$K^2 = O_2$; $KL = O_2$; $LI = LJ = O_2$; $LK = K$; $L^2 = L$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels.

a) Calculer les quatre produits : XA où $X \in \{I, J, K, L\}$.

__Facile__ : $IA = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $JA = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $KA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$

b) Calculer de même les quatre produits : AX, où $X \in \{I, J, K, L\}$.

__De même__ : $AI = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ $AJ = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$ $AK = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ $AL = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

3) Démontrer que toute matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels est une combinaison linéaire des matrices I, J, K et L.

__Réponse__ : Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aI + bJ + cK + dL.$$

Donc A est une combinaison linéaire des matrices I, J, K et L.

4) Donner la matrice M carrée d'ordre 3, dont les coefficients m_{ij} sont définis par : $m_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{j} \text{ si } i < j \\ i + j \text{ si } i \geq j \end{cases}$.

__Réponse__ : $M = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 3 & 4 & \frac{2}{3} \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice III

26 page 237 :

$A = \begin{pmatrix} 2x^2 & 5y-4 \\ 0 & y^2-4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 18 & 3x+7 \\ 0 & 4x \end{pmatrix}$

$A = B \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 5y-4 = 3x+7 \\ y^2-4 = 4x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{6}{5} \\ \frac{36}{25} = -8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ 12 = 12 \end{cases}$

Or, $\frac{36}{25} \neq -8$

Donc : $\boxed{A = B \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}}$

34 page 237.

c) $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0,1 & 20 \\ -5 & 16 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 13 & 45 & 8 \\ 10 & 10 & 0,2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 13 & 45 & 8 \\ 10 & 10 & 0,2 \end{pmatrix} \\ AB = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0,1 & 20 \\ -5 & 16 \end{pmatrix} & \end{array} = \begin{pmatrix} 130 & 450 & 80 \\ 201,3 & 204,5 & 4,8 \\ 95 & -225+160 & -40+3,2 \end{pmatrix}$$

Donc : $\boxed{AB = \begin{pmatrix} 130 & 450 & 80 \\ 201,3 & 204,5 & 4,8 \\ 95 & -65 & -36,8 \end{pmatrix}}$

43 page 238 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) $AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

$2A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Donc : $AA - 2A = \begin{pmatrix} 10-2 & 6-6 \\ 6-6 & 10-2 \end{pmatrix}$

$\boxed{AA - 2A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}$

b) $AA - 2A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 8 I_2$

Donc $\boxed{A(A - 2I_2) = 8 I_2}$

c) $A(A - 2I_2) = 8 I_2$

Donc : $A \dfrac{(A - 2I_2)}{8} = I_2$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{8}(A - 2I_2) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Donc : $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}}$

52 page 239 $(S) : \begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ -x + 2y + z = 4 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) Donc : $(S) : AX = B$ avec : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Car : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ -x + 2y + z = 4 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (S)$.

Donc : $\boxed{(S) : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}$

b) D'après la calculatrice : $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

$(S) : AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow I_3X = A^{-1}B \Leftrightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$

D'après la machine : $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Donc : $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ainsi : $\boxed{(S) : \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}}$

Exercice V : $A \in M_n(\mathbb{R})$; $B \in M_n(\mathbb{R})$ $n \in \mathbb{N}^*$

a) Supposons que A et B commutent, c'est-à-dire que : $\boxed{AB = BA}$

On a : $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2$ car $AB = BA$.

Donc : $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Ainsi, si A et B commutent, alors : $\boxed{(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Donc : $\boxed{(A+I_3)^2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ 15 & 6 & 6 \\ 4 & 22 & 0 \end{pmatrix}}$

<u>Exercice V</u>

Exercice III : $A = \begin{pmatrix}1&3&-3\\3&1&-3\\3&3&-5\end{pmatrix}$

1) $A - I = \begin{pmatrix}0&3&-3\\3&0&-3\\3&3&-6\end{pmatrix}$ et $A+2I = \begin{pmatrix}3&3&-3\\3&3&-3\\3&3&-3\end{pmatrix}$

Donc : $(A-I)(A+2I) = \begin{pmatrix}0&3&-3\\3&0&-3\\3&3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3&-3\\3&3&-3\\3&3&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\boxed{(A-I)(A+2I) = 0_3}$

$\iff A^2 + A2I - IA - 2I^2 = 0_3 \iff A(A+I) = 2I$

$\iff A\frac{(A+I)}{2} = I \iff A \cdot \frac{1}{2}(A+I) = I.$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&3&-3\\3&2&-3\\3&3&-4\end{pmatrix}$

$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&1&-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&-2\end{pmatrix}}$

Si $A - I$ était inversible alors il existerait une matrice $(A-I)^{-1}$ tel que : $(A-I)(A-I)^{-1} = I_3$. Or, $(A-I)(A+2I) = 0_3$

Donc en premultipliant par $(A-I)^{-1}$: $I(A+2I) = 0_3(A-I)^{-1}$

Et donc : $(A+2I) = 0_3$. Or, $A+2I = \begin{pmatrix}3&3&-3\\3&3&-3\\3&3&-3\end{pmatrix} \neq 0_3$.

Donc A – I non inversible.

De même, si $A+2I$ était inversible, alors il existerait une matrice $(A+2I)^{-1}$ telle que : $(A+2I)(A+2I)^{-1} = I_3$.

Or : $(A-I)(A+2I) = O_3$

Donc en postmultipliant par $(A+2I)^{-1}$: $(A-I)I_3 = O_3(A+2I)^{-1}$

Donc : $(A-I) = O_3$.

Or, $A-I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \neq O_3$.

Donc par l'absurde, <u>la matrice $A-I$ n'est</u> <u>pas inversible.</u>

2) Montrons par récurrence la propriété $P(n)$: $\exists (a_n ; b_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = a_n I + b_n A$.

<u>Etape d'initialisation:</u> Pour $n=0$: $A^0 = I = 1 \times I + 0 \times A$.

Donc <u>$P(0)$ est vraie</u> avec $\boxed{a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0}$

<u>Etape d'hérédité</u>: Soit n un entier fixé tel que : $A^n = a_n I + b_n A$ avec a_n et b_n réels.

On a : $A^{n+1} = A A^n$.

Donc d'après notre hypothèse de récurrence : $A^{n+1} = A(a_n I + b_n A)$.

Donc : $A^{n+1} = a_n A I + b_n A^2$.

Or, d'après 1) : $A^2 + A - 2I = 0 \Leftrightarrow A^2 = 2I - A$.

Donc : $A^{n+1} = a_n A + b_n(2I - A) = a_n A + 2b_n I - b_n A$.

Donc : $A^{n+1} = (a_n - b_n)A + 2b_n I$.

C'est-à-dire : $A^{n+1} = 2b_n I + (a_n - b_n)A$. Donc $\boxed{a_{n+1} = 2b_n \; ; \; b_{n+1} = a_n - b_n}$

Ainsi, <u>$P(n+1)$ est vraie.</u>

<u>Conclusion</u>: $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à tout ordre.

Donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n ; b_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = a_n I + b_n A}$

Exercice VI **(facultatif)**

Supposons par l'absurde qu'au moins 2 matrices soient inversibles. Il se distingue alors 3 cas :

- Si A et B sont inversible alors il existe deux matrices A^{-1} B^{-1} telles que : $AA^{-1} = I_3$ et $BB^{-1} = I_3$.

Or, on a : $ABC = O_3$ donc : $B^{-1}A^{-1}ABC = O_3$

Et donc : $B^{-1}BC = O_3$

C'est-à-dire : $C = O_3$.

Or, A, B et C ne sont pas nulles donc en particulier : $C \neq O_3$

Donc A n'est pas inversible ou B n'est pas inversible.

- De même si A et C sont inversibles, alors :

$ABC = O_3 \Leftrightarrow A^{-1}ABC = O_3 \Leftrightarrow BCC^{-1} = O_3 \Leftrightarrow B = O_3$

Or, B n'est pas nulle.

Donc A n'est pas inversible ou C n'est pas inversible.

- Enfin, si B et C sont inversibles alors :

$ABC = O_3 = ABCC^{-1}B^{-1} = O_3 \Leftrightarrow ABB^{-1} = O_3 \Leftrightarrow A = O_3$.

Or, A n'est pas nulle.

Donc B ou C ne sont pas inversible.

Donc dans tous les cas, au moins deux matrices ne sont pas inversibles.