

## Exercice I

27p29

$$z_1 = (3+i)^3 = (3+i)(3+i)^2 = (3+i)(9+6i+i^2) = (3+i)(8+6i) = 24+18i+8i-4$$

$$\boxed{z_1 = 18+26i}$$

Méthode ② :  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , donc  $z_1 = (3+i)^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 \times i + 3 \times 3 \times i^2 + i^3$

$$\boxed{z_1} = 27 + 27i - 9 - i = \boxed{18+26i}$$

$$z_2 = (3-2i)^3 = (3-2i)(3-2i)^2 = (3-2i)(9-12i-4) = (3-2i)(5-12i) = 15-36i-10i-24$$

$$\boxed{z_2 = -9-46i}$$

Méthode ② :  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ;  $z_2 = (3-2i)^3 = 3^3 - 3 \times 3^2 \times 2i + 3 \times 3 \times (2i)^2 - (2i)^3$

$$\boxed{z_2} = 27 - 54i - 36 - 8i^3 = 27 - 36 - 54i + 8i = \boxed{-9-46i}$$

28p29

$$z_1 = 3+2i \quad z_2 = -1+3i \quad z_3 = 1-i$$

a) d'abord on détermine  $z_1 + z_2 + z_3 = 3+4i$ , donc  $\text{Re}(z_1 + z_2 + z_3) = 3$ .

$iz_2 = i(-1+3i) = -i+3i^2 = -3-i$ , donc  $\text{Re}(iz_2) = -3$ .

⚠  $\text{Re}(iz_2) \neq \text{Re}(i) \times \text{Re}(z_2)$  comme j'ai pu le voir dans certaines copies...

$z_1^2 = (3+2i)^2 = 9+12i-4 = 5+12i$ , donc  $\text{Re}(z_1^2) = 5$  (Rq :  $\text{Re}(z_1^2) \neq (\text{Re}(z_1))^2$  !)

b)  $z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3 = 3+2i - 2(-1+3i) + \frac{1}{2}(1-i) = 3+2i + 2-6i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}i$

donc  $\text{Im}(z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3) = -\frac{3}{2}$ .

$z_1 \times z_2 = (3+2i)(-1+3i) = -3+9i-2i-6 = -9+7i$ , donc  $\text{Im}(z_1 \times z_2) = 7$ .

$z_2^2 = (-1+3i)^2 = 1-6i-9 = -8-6i$ , donc  $\text{Im}(z_2^2) = -6$ .

51. p. 30.  $z_1 = 2+i$ ;  $z_2 = \sqrt{3}-i$

a)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(2+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{2\sqrt{3}+2i+i\sqrt{3}-1}{3+1}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{4} + \frac{i(2+\sqrt{3})}{4}$

b)  $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2+i} + \frac{1}{\sqrt{3}-i} = \frac{2-i}{4+1} + \frac{\sqrt{3}+i}{3+1} = \frac{8-4i+5\sqrt{3}+5i}{20}$

$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{8+5\sqrt{3}}{20} + \frac{1-i}{20}$

c)  $\frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} = \frac{\sqrt{3}-2-2i}{\sqrt{3}+2} = \frac{(\sqrt{3}-2-2i)(\sqrt{3}-2)}{3-4} = \frac{3-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+4-2i\sqrt{3}+4i}{-1}$

$\frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} = \frac{-(7-4\sqrt{3}-i(2\sqrt{3}-4))}{1}$

$\frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} = -7+4\sqrt{3} + (2\sqrt{3}-4)i$   
*oui*

74 p. 31.

b)  $2iz - \bar{z} + 1 = 0$

Posons  $z = a+ib$  avec  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  et donc:  $\bar{z} = a-ib$

Donc:  $2i(a+ib) - (a-ib) + 1 = 0$

$2ai - 2b - a + ib + 1 = 0$

$-a + 1 - 2b + i(2a+b) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+1-2b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2-4b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$



$$\boxed{S_4 = \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i \right\}} \text{ ou } /$$

75. page 31.

$$b) \bar{z} + i = 2(z - i) \quad /$$

$$\text{Donc: } -2z + 2i + \bar{z} + i = 0$$

$$-2z + 3i + \bar{z} = 0$$

$$\text{Posons } z = a + bi \text{ avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et donc: } \bar{z} = a - bi$$

$$\text{Donc: } -2(a + bi) + 3i + a - bi = 0$$

$$-a - 3bi + 3i = 0$$

$$-a + i(-3b + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 0 \\ -3b + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{S_4 = \{i\}} \quad /$$

113 page 36.

$$(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z + 1 - i = 0 \text{ ou } i\bar{z} + i - 2 = 0$$

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ ou } \bar{z} = \frac{2}{i} + 1 = \frac{2i}{-1} + 1$$

$$\bar{z} = 1 - 2i$$

$$z = 1 + 2i$$

$$\boxed{S_4 = \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i; 1 + 2i \right\}} \text{ ou } /$$

118 page 36.  $z \neq 0$

$$\text{Posons } z = a + ib \text{ avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et donc: } \bar{z} = a - ib \text{ et } a + bi \neq 0$$

$$\text{Ainsi: } \frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + ib}{a - ib} = \frac{(a + ib)(a + ib)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2 + 2aib}{a^2 + b^2}$$

$$\text{or } a + bi \neq 0 \text{ ou } /$$



LAGODIE-  
GORCIER

Reiny

Exercice II:  $\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}, f(z) = \frac{z-iz}{1-z}$

1) Supposons par l'absurde que  $i$  possède un antécédent par  $f$ .

Alors:  $f(z) = i \Leftrightarrow \frac{z-iz}{1-z} = i \Leftrightarrow z-iz = i-i/z \quad \text{et } z \neq 1$

$f(z) = i \Leftrightarrow \boxed{z=i}$

or,  $i \neq i$  car  $i \notin \mathbb{R}$

Ainsi notre supposition initiale est fautive.

Donc  $i$  ne possède pas d'antécédents par  $f$ .

2)  $Z \in \mathbb{C} - \{i\}$

Déterminons ainsi le nombre de solution de l'équation:

(E):  $f(z) = Z$  d'inconnue  $z$ .

$f(z) = Z \Leftrightarrow \frac{z-iz}{1-z} = Z \Leftrightarrow z-iz = Z-Zz \quad \text{et } z \neq 1$

$f(z) = Z \Leftrightarrow z(Z-i) - Z + Z = 0 \quad \text{et } z \neq 1$

Donc (E):  $\boxed{z = \frac{Z-Z}{Z-i}}$  car  $Z \neq i$

Ainsi (E) admet une solution:  $\frac{Z-Z}{Z-i}$  avec  $Z \neq i$ .

Donc si  $Z$  est différent de  $i$ ,  $Z$  admet un antécédent par  $f$ .

3-a)  $f(z) = \frac{z-iz}{1-z}$

Poseons  $z = a+ib$  avec  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $(a; b) \neq (1; 0)$

Donc:  $f(z) = \frac{z-iz}{1-a-ib}$

$f(z) = \frac{(Z-ia+b)(1-a+ib)}{(1-a)^2 + b^2} = \frac{Z-2a+2ib-ia+ia^2+ab+ib-ab+ib^2}{(1-a)^2 + b^2}$

$f(z) = \frac{Z-2a+b}{(1-a)^2 + b^2} + i \frac{(2b-a+a^2+b^2)}{(1-a)^2 + b^2}$

$$3b) f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2a+b+2}{(a-1)^2+b^2} = 0 \text{ et } (a;b) \neq (1;0) \Leftrightarrow b = 2a-2 \text{ et } a \neq 1$$

donc  $\boxed{z = a + (a-2)i \text{ avec } a \neq 1, (a \in \mathbb{R} \setminus \{1\})}$