Calculs algébriques

$$A = \frac{5^{10}\times 7^3 - 25^5\times 49^2}{(125\times 7)^3 + 5^9\times 14^3} = \frac{5^{10}\times 7^3 - (5^2)^5\times (7^2)^2}{(5^3\times 7)^3 + 5^9\times (2\times 7)^3} = \frac{5^{10}\times 7^3 - 5^{10}\times 7^4}{5^9\times 7^3 + 5^9\times 2^3\times 7^3}$$

$$\boxed{A} = \frac{5^{10}\times 7^3\times(1-7)}{5^9\times 7^3\times(1+2^3)} = \frac{5\times(-6)}{9} = \boxed{\frac{-10}{3}}$$

$$\boxed{B} = \sum_{k=1}^{4} \frac{k^2}{2^k} = \frac{1^2}{2^1} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{8} + 1 = \frac{5}{2} + \frac{9}{8} = \boxed{\frac{29}{8}}$$

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2$ car $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ (IR3).

Exercice I

1)

n est impair, donc il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k+1$.

Donc $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = (2k+1-1)(2k+1+1)$ $\quad (A^2 - B^2 = (A+B)(A-B))$

$n^2 - 1 = 2k(2k+2) = 2k\times 2\times(k+1) = 4k(k+1)$.

Or $k(k+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, donc $k(k+1)$ est pair (le voir, si besoin est, en distinguant les cas où k est pair et celui où k est impair).

Par suite, il existe un entier ℓ tel que : $k(k+1) = 2\ell$.

et donc : $n^2 - 1 = 4\times 2\ell = 8\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}$, donc n^2-1 est un multiple de 8.

2)

i) On raisonne par contraposition :

Montrons que si n est un entier pair, alors $\frac{n(n+2)}{4}$ est un entier.

Supposons n pair : $n = 2k$ avec k entier.

Alors $\frac{n(n+2)}{4} = \frac{2k(2k+2)}{4} = \frac{2k\times 2(k+1)}{4} = k(k+1)$ avec $k(k+1) \in \mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}$ stable par + et $\times$.

Donc $\boxed{\frac{n(n+2)}{4} \in \mathbb{Z}}$.

Par contraposée on a bien établi que : $\boxed{\text{Si } \frac{n(n+2)}{4} \notin \mathbb{Z}, \text{ alors } n \text{ est impair}}$.

Exercice II

33 p 151

$m \in \mathbb{Z}$. $\boxed{m \neq -7}$ ici.

a) Procédons par double implication :

Si $m+7$ divise $3m+1$, alors comme $m+7$ divise $m+7$, il en résulte que $m+7$ divise la combinaison linéaire : $-(3m+1)+3(m+7)=\underline{20}.$

Réciproquement : Si $m+7$ divise 20 (*)
alors comme $m+7$ divise $m+7$, on a $m+7$ qui divise $3(m+7)$ (**)

Donc $m+7$ divise la CBL $3(m+7)-20=\underline{3m+1}.$

Ainsi on a bien : $\boxed{(m+7) \mid (3m+1) \iff (m+7) \mid 20}$

b) Grâce à a) cela équivaut à chercher $m \in \mathbb{Z}$ tels que $m+7$ divise 20.

Or $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}(20)=\{-20;-10;-5;-4;-2;-1;1;2;4;5;10;20\}.$

$m+7 \in \mathcal{D}_{\mathbb{Z}}(20)$ conduit à résoudre 12 équations : $m+7=-20$ ...... et $m+7=20$.

La résolution est aisée. $m \in \{-27;-17;-12;-11;-9;-8;-6;-5;-3;-2;3;13\}$

[illegible] donc $\mathcal{S}=\{-27;-17;-12;-11;-9;-8;-6;-5;-3$

Exercice III

Remarque : J'ai mal choisi l'équation (E) !

Ici en écrivant que $2(x^3 + 2x^2) = 3$, on arrive, du fait que si x est entier, à 2 divise 3 ce qui est une contradiction.

Le raisonnement ci-dessous ce serait mieux prêté à une équation de la forme : $2x^3 + 5x^2 - 3 = 0$ par exemple.

(E) $2x^3+4x^2-3=0$.

a) Soit $x\in\mathbb{Z}$. Supposons x solution de (E) :

Alors : $2x^3+4x^2-3=0$, donc $2x^3+4x^2=3$, donc $x(2x^2+4x)=3$ (*)

Or $(2x^2+4x)\in\mathbb{Z}$ car $x\in\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ est stable par $+$ et $\times$.

donc la relation (*) signifie que <u>x est un diviseur de 3.</u>

b) $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}(3)=\{-3;-1;1;3\}$.

D'après q.a) si $x\in\mathbb{Z}$ est solution de (E), alors $x\in\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}(3)$.

donc $x=-3$ ou $x=-1$ ou $x=1$ ou $x=3$.

<u>Si $x=-3$</u> : $2x^3+4x^2-3=2\times(-3)^3+4\times(-3)^2-3=2\times(-27)+4\times9-3=-21$ ($\neq0$)

de même <u>Si $x=-1$</u> : $2x^3+4x^2-3=2\times(-1)^3+4\times(-1)^2-3=-1$ ($\neq0$).

<u>Si $x=1$</u> : $2x^3+4x^2-3=2+4-3=3$ ($\neq0$).

<u>Si $x=3$</u> : $2x^3+4x^2-3=2\times3^3+4\times3^2-3=77$ ($\neq0$).

donc aucune de ces valeurs n'est solution de (E), en contradiction avec le fait qu'on suppose que (E) a au moins une solution entière.

$\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(E)=\emptyset$

Exercice IV

2) On procède par double implication pour prouver cette équivalence :

Si $b=d$ et $a=c$, alors $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ est trivial. ($b=d$, donc $b\sqrt{2}=d\sqrt{2}$

Donc : $\dfrac{a=c}{a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}}$

Réciproque : Supposons que (*) $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{Q}^4$:

Alors $(b-d)\sqrt{2}=c-a$ (**)

Si $b\neq d$, alors $b-d\neq 0$ et par suite $\sqrt{2}=\dfrac{c-a}{b-d}$. Or $\mathbb{Q}$ est stable par différence et quotient, donc on aurait $\dfrac{c-a}{b-d}\in\mathbb{Q}$, bref $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$: absurde !

Ainsi $b=d$: Donc (**) se réécrit en : $0\sqrt{2}=c-a$, donc $c-a=0$ et $a=c$.

Ainsi si (*) est vraie, alors $a=c$ et $b=d$.

Par double implication, on a bien prouvé le résultat voulu.