Chapitre 3 *Nombres complexes : point de vue géométrique*

I-Plan complexe, généralités

Définition

On considère un repère du plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\ \overrightarrow{OU}\,;\ \overrightarrow{OV}\right)$.

- À tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réels, on associe le point M de coordonnées $(x\,;y)$.
  On dit que M est ***le point image de z*** et que $\overrightarrow{OM}$ est ***le vecteur image de z.***

- Tout point $M(x\,;y)$ est le point image d'un unique nombre complexe $z = x + iy$.

On dit que z est ***l'affixe*** (♀) du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Pour dire que le point M a pour affixe z, on notera : M(z).

Remarque : Par ce procédé, on identifie donc le plan muni d'un repère orthonormé direct et l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Exemple 1

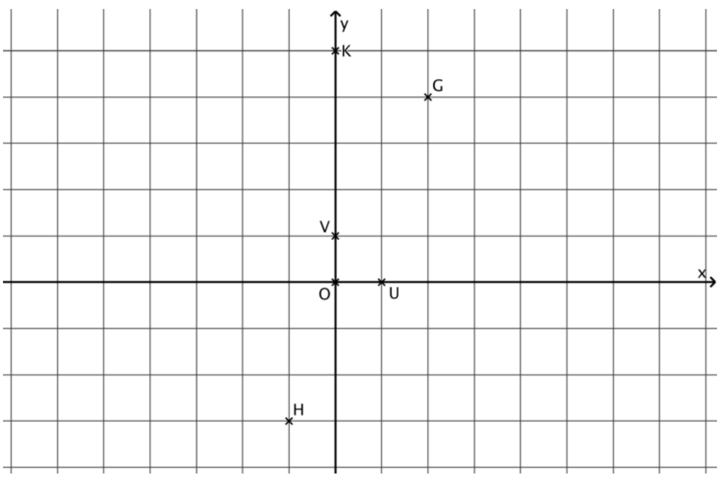
Dans le repère orthonormé direct $\left(O\,;\ \overrightarrow{OU}\,;\ \overrightarrow{OV}\right)$ ci-contre :

a) Placer les points A, B, C, D, E et F d'affixes respectives : $z_A = 3+2i$; $z_B = -2+5i$; $z_C = -5-i$; $z_D = 1-3i$; $z_E = 4$ et $z_F = 3i$.

b) Donner l'affixe des points O, U, V, G, H et K.

c) Dans ce repère où sont situés :
- Les points d'affixe réel ?
-Les points d'affixe imaginaire pur ?

d) Soient z un nombre complexe, $\overline{z}$ son conjugué, M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $\overline{z}$.
Que peut-on dire des points M et M' ?



✂--

Remarques : ♥

-Les nombres réels sont les affixes des points appartenant à……………………………….……...…..,aussi appelé ici, axe des …...

-Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points appartenant à…… ………..……..……., aussi appelé ici, axe des ……………………………

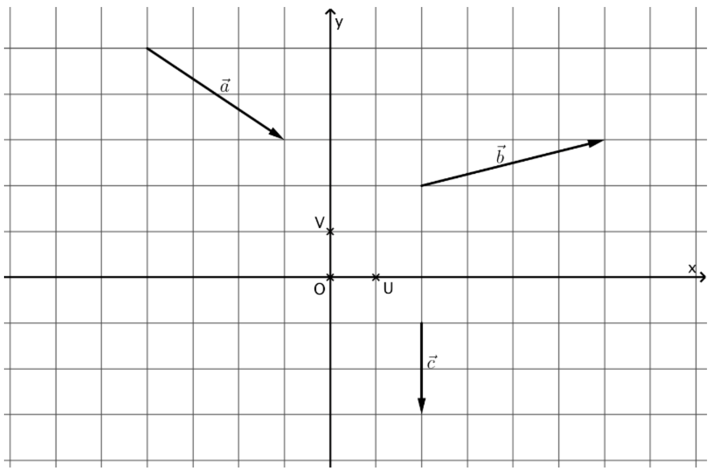
♥ Le point M d'affixe z et le point M' d'affixe $\overline{z}$ sont …………………………………………………………♥

Exemple 2

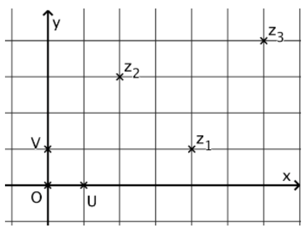
Dans le repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV}\right)$ ci-contre :

a) Tracer un représentant des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ d'affixes respectives :
$z_{\vec{u}} = 3+2i$; $z_{\vec{v}} = -1-4i$ et $z_{\vec{w}} = 5$.

b) Donner l'affixe des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$.



Propriétés



♥♥Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs affixes sont égales. ♥♥

♥♥Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixes z et z' alors : le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe ……… et

Pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour affixe …… ♥♥

♥♥♥ Si A(z_A) et B(z_B) alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe ………….. ♥♥♥

♥♥Si A(z_A) et B(z_B) alors le milieu I du segment [AB] a pour affixe I $\left(\frac{\qquad}{\square}\right)$. ♥♥

Preuve : On ne fait que traduire les propriétés connues dans le plan à l'aide des nombres complexes en utilisant le procédé d'identification décrit en début de paragraphe.

Exercice 1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct$\left(O\,;\,\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV}\right)$, on donne :

$\vec{u}$ a pour affixe $2+3i$, $\vec{v}$ a pour affixe $-1+5i$, A($2+3i$) et B($-4+7i$).

a) Calculer les affixes de $\vec{u}+\vec{v}$, de $5\vec{u}$, de $\overrightarrow{AB}$, et du point I milieu de [AB].

b) Soit C le point d'affixe $z_C = -2i$. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme, puis calculer l'affixe du point K centre du parallélogramme ABCD.

b) Calculer la longueur OA, puis la longueur AB.

c) Soit M(z) où z $= x + iy$ avec x et y deux réels. Calculer OM.

II-Module d'un nombre complexe

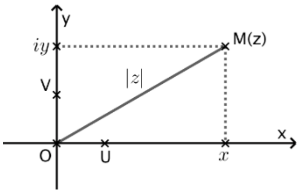
Soit $(O\,;\,\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV})$ un repère orthonormé direct du plan complexe.

a) Définition

z est un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ où x et y sont deux nombres réels.

♥♥♥ ***Le module de z*** est le nombre réel positif, noté |z|, défini par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$♥♥♥.

Illustration :



Conséquences directes et importantes **:**

- Soit M le point d'affixe z.
  ♥ Alors OM $=$ |z| : géométriquement, le module de z est la distance entre le point O origine du repère et le point M d'affixe z. ♥

- $|z| = 0 \iff z = 0$.

Remarque : Si x est un nombre réel, à quoi est égal le module de x ? Pourquoi ?

Ainsi, la notation du module ne fait que prolonger celle déjà connue de la valeur absolue.

Attention toutefois à ne pas parler de valeur absolue d'un complexe, on dira toujours module d'un nombre complexe ! (Penser qu'un nombre complexe n'a pas de signe, sauf s'il est réel !!!).

Exercice 2

Construire dans un repère orthonormé direct l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

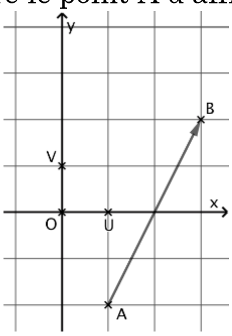
a) $|z| = 1$.

b) $1 \leqslant |z| < 2$.

✂---

Exercice 3

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV})$, on considère le point A d'affixe $z_A = 1-2i$.



a) Calculer $|1-2i|$. Qu'en déduisez-vous ?

b) Le point B a pour affixe $z_B = 3+2i$. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

c) Calculer la longueur AB.

Déterminer si la proposition suivante est vraie ou fausse, en justifiant :

“ Si deux nombres complexes sont égaux, alors ils ont le même module ”.

Quid de la réciproque ?

✂---

Propriété clé

Soit $(O\,;\,\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV})$ un repère orthonormé direct du plan complexe, et A et B deux point d'affixes respectives z_A et z_B.

La distance AB est égale à : ♥♥♥ ♥♥♥

Preuve et illustration :

✂---

Exercice 4

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 6+5i$, $z_B = 7+2i$, $z_C = 10+i$ et $z_D = 9+4i$.

a) Placer ces points dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV})$, puis émettre une conjecture concernant la nature du quadrilatère ABCD.

b) Démontrer que cette conjecture est vraie.

✂---

Exercice 5

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV})$.

Soit A le point ayant pour affixe $z_A = 2i$ et B le point ayant pour affixe $z_B = 3-i$

Déterminer puis construire l'ensemble formé par tous les points M d'affixe z tels que :

a) $|z-2i| = 1$.

b) $|z-3+i| = 2$.

c) $|z-2i| = |z-3+i|$.

✂---

b) Propriétés clé du module

Pour tout nombre complexe z :

♥♥♥ **1)** $|-z| = \cdots$ **2)** $|\overline{z}| = \cdots$ **3)** $z\,\overline{z} = \cdots$ ♥♥♥

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel $n \geq 1$:

♥♥♥ **4)** $|z\,z'| =$ **5)** $|z^n| =$ **6)** Si $z' \neq 0$) $\left|\frac{1}{z'}\right| =$ **7)** **Si** $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| =$ ♥♥♥

Preuve :

✂---

Exercice 6

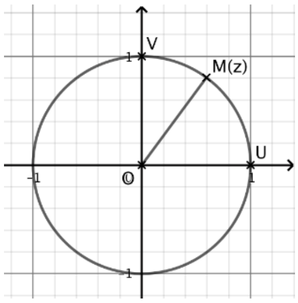
1) Calculer le module des nombres complexes $\sqrt{5}+2i$ et $1-3i$.

2) Déterminer alors le module des nombres complexes suivants :

$a)\ z_1 = \dfrac{\sqrt{5}+2i}{1-3i}$ $\qquad b)\ z_2 = \left(\sqrt{5}+2\mathrm{i}\right)^4$ $\qquad c)\ z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}+2\mathrm{i}}$ $\qquad d)\ z_4 = \dfrac{-2(1-3\mathrm{i})}{\sqrt{5}+2\mathrm{i}}$

✂--

c) L'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module égal à 1



Notation :

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| = 1\}$.

Dans le plan complexe, l'ensemble des points images des éléments de l'ensemble $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique.

Propriétés

$a)$ Si $z \in \mathbb{U}$ et $z' \in \mathbb{U}$ alors $zz' \in \mathbb{U}$ $\qquad b)$ Si $z \in \mathbb{U}$ alors $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$ $\qquad c)$ Si $z \in \mathbb{U}$ et $z' \in \mathbb{U}$ alors $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$.

Ainsi, l'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit, inverse et par quotient.

Démonstration :

✂--

Exemples

1) Soit $z_1 = -6 + i$ et $z_2 = 5 + 2\sqrt{3}i$. Montrer que $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{U}$.
2) Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z sachant que : $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$.
3) Soit u et v deux éléments de $\mathbb{U}$ tels que $uv \neq -1$. Montrer que $Z = \frac{u+v}{1+uv}$ est réel.

✂--

Exercice 7 ***(exercice d'approfondissement)***

Soit z et z' deux nombres complexes.

1) Démontrer que : $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2re(z\overline{z'}) + |z|'^2$.

2) Justifier que pour tout nombre complexe ω, $\mathrm{Re}(\omega) \leq |\omega|$.

3) En déduire que $|z+z'| \leq |z| + |z'|$. Cette dernière inégalité est appelée l'inégalité triangulaire.

Interpréter géométriquement cette dernière en introduisant les points M, N et P d'affixes respectives : z, z' et z + z'.

4) Etablir que pour tous nombres complexes z et z', on a aussi : $|z| \leq |z-z'| + |z'|$.

En déduire la seconde inégalité triangulaire : $\big||z| - |z'|\big| \leq |z-z'|$.

Exercice 8

Un entier naturel N est dit somme de deux carrés s'il existe deux entiers naturels a et b tels que $N = a^2 + b^2$.

C'est par exemple de cas de 26 car $26 = 1^2 + 5^2$ ou encore de $137 = 4^2 + 11^2$.

Soit N_1 et N_2 deux entiers qui sont la somme de deux carrés. On se propose d'établir sous cette hypothèse que N_1N_2 est encore une somme de deux carrés d'entiers.

Ecrivons : $N_1 = a^2 + b^2$ et $N_2 = c^2 + d^2$ avec a, b, c et d entiers naturels.

Posons enfin $z_1 = a+ib$ et $z_2 = c+id$.

a) Exprimer N_1 et N_2 en fonction de z_1 et z_2.
b) En déduire que N_1N_2 est une somme de deux carrés.
c) Démontrer que si N est somme de deux carrés, alors pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, N^p est également somme de deux carrés.

✂---

III- Argument d'un nombre complexe non nul

On se place dans un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ du plan complexe.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique. (Centré en O et de rayon 1 orienté dans le sens direct).

a) Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z.

♥♥♥ On appelle ***argument de z***, et on note $arg(z)$, ***toute mesure exprimée en radian de l'angle orienté*** $(\vec{u}\ ;\overrightarrow{OM})$. ♥♥♥

Illustration :

Remarques

- Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments :
  Si θ est un argument de z alors les autres s'écrivent $\theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

  On notera alors, comme en arithmétique : $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$. (Lire : un argument de z est égal à θ modulo 2π.
- Le nombre 0 n'a pas d'argument.
- En général, on conviendra de toujours choisir l'argument principal de z, c'est-à-dire l'unique réel $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi]$.

***Exemple* 1**

Placer, dans le plan complexe, les points A, B, C, D, E, F, G dont les affixes sont définies ci-dessous :

$z_A \in \mathbb{C}$ tel que $|z_A| = 1$ et $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$z_B \in \mathbb{C}$ tel que $|z_B| = 1$ et $\arg(z_B) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

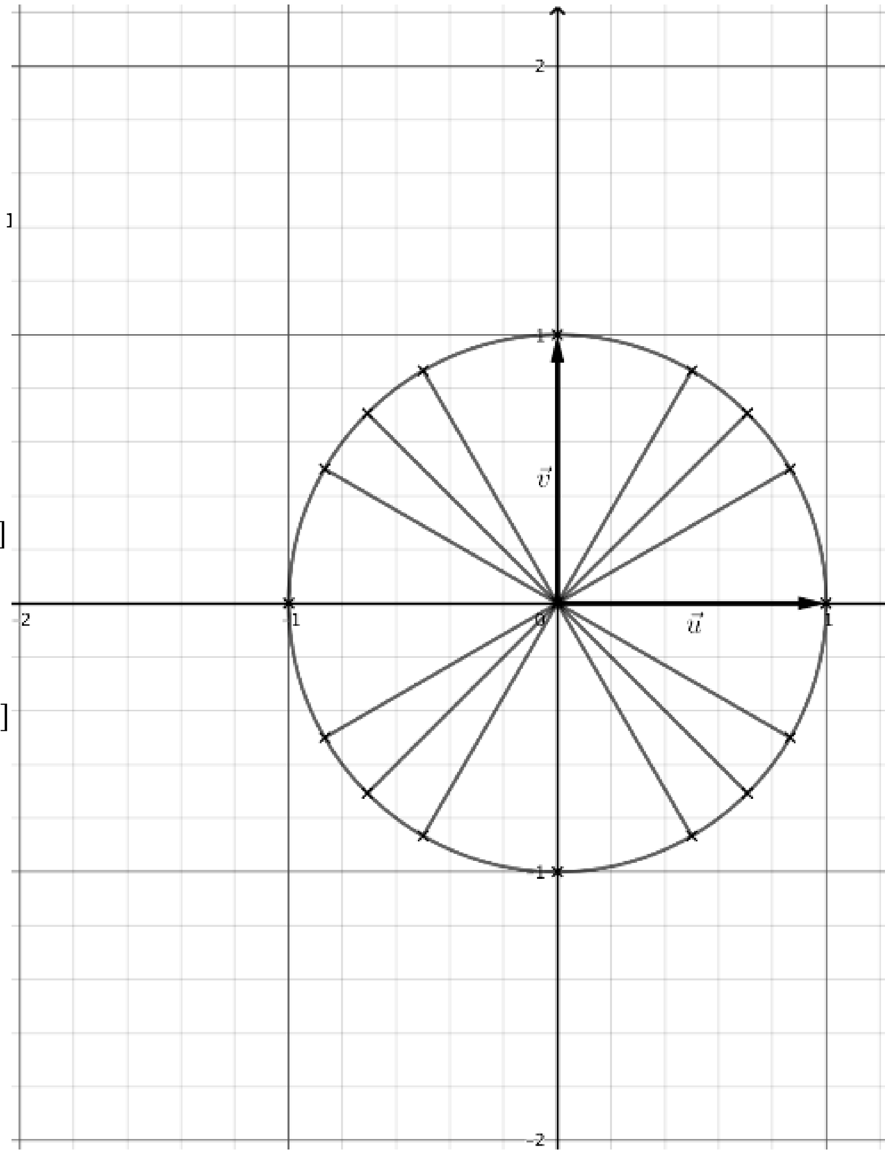
$z_C \in \mathbb{C}$ tel que $|z_C| = 1$ et $\arg(z_C) = -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

$z_D \in \mathbb{C}$ tel que $|z_D| = 2$ et $\arg(z_D) = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

$z_E \in \mathbb{C}$ tel que $|z_E| = 0{,}5$ et $\arg(z_E) = \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

$z_F \in \mathbb{C}$ tel que $|z_F| = 1{,}2$ et $\arg(z_F) = 0\ [2\pi]$

$z_G \in \mathbb{C}$ tel que $|z_G| = 1{,}2$ et $\arg(z_G) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$



Que nous enseigne cet exemple 1 ?

Déterminer de tête:

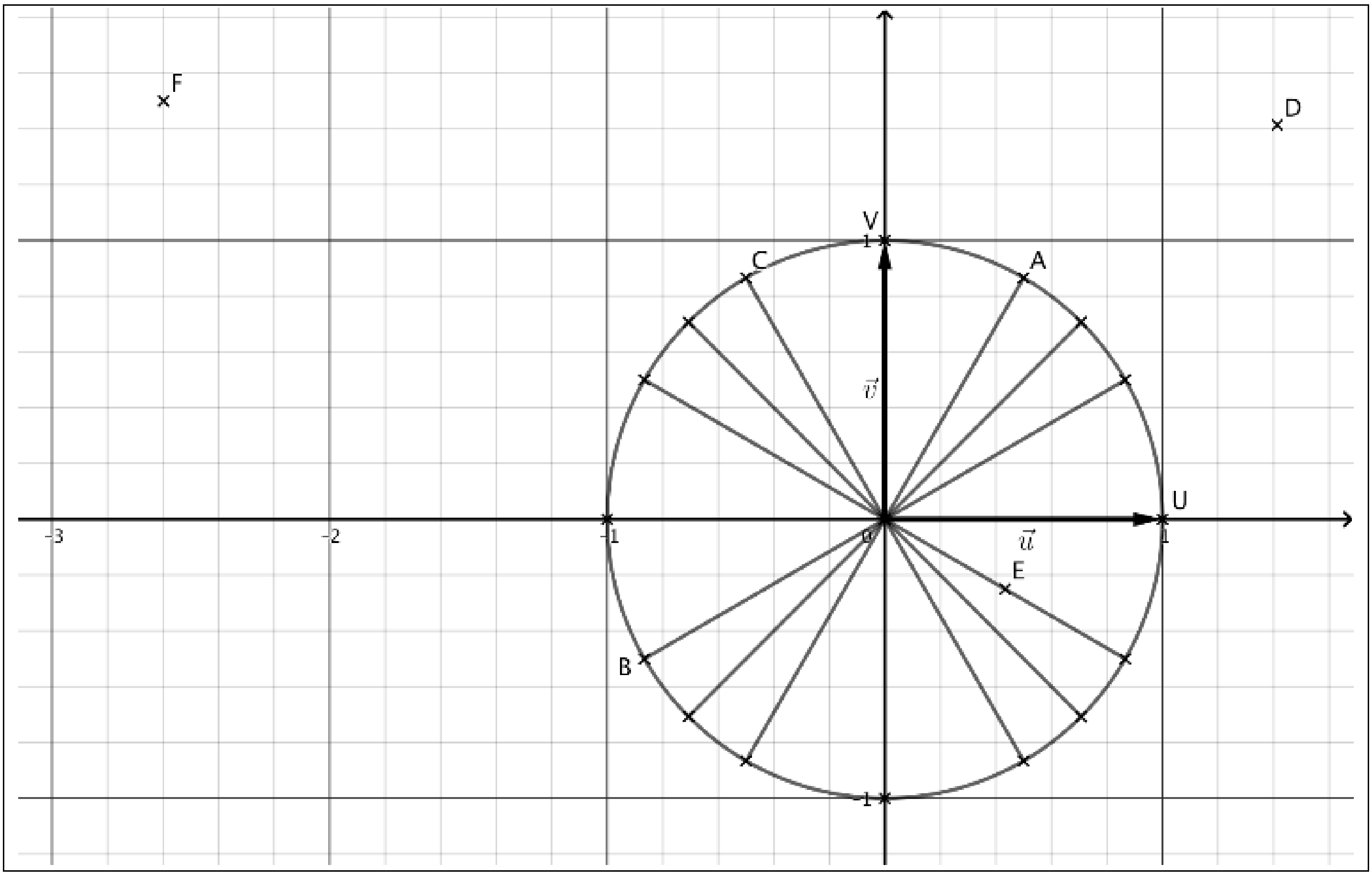
$arg(i)$; $arg(-2i)$; $arg(3)$; $arg(-5)$.

Il est impératif de savoir donner instantanément l'argument d'un nombre réel positif, négatif, d'un nombre imaginaire pur dont la partie imaginaire est positive (respectivement négative).

***Exemple* 2**

Par lecture graphique, donner le module et l'argument des affixes des points A, B, C, D, E, F, U et V donnés dans le plan complexe ci-dessous :

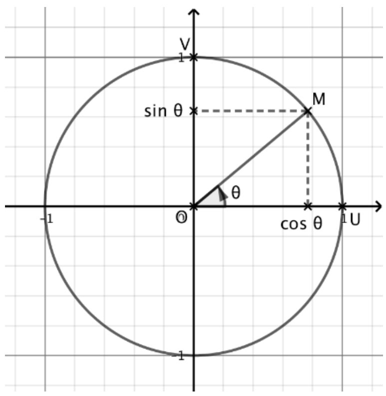
Réponses :



b) Relations entre forme algébrique d'un nombre complexe non nul, module et un argument.

Rappels de trigonométrie

On considère un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{OV})$ du plan.
Soit θ un nombre réel, et M le point appartenant au cercle trigonométrique, tel que $(\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi \;\;,\; k \in \mathbb{Z}$.

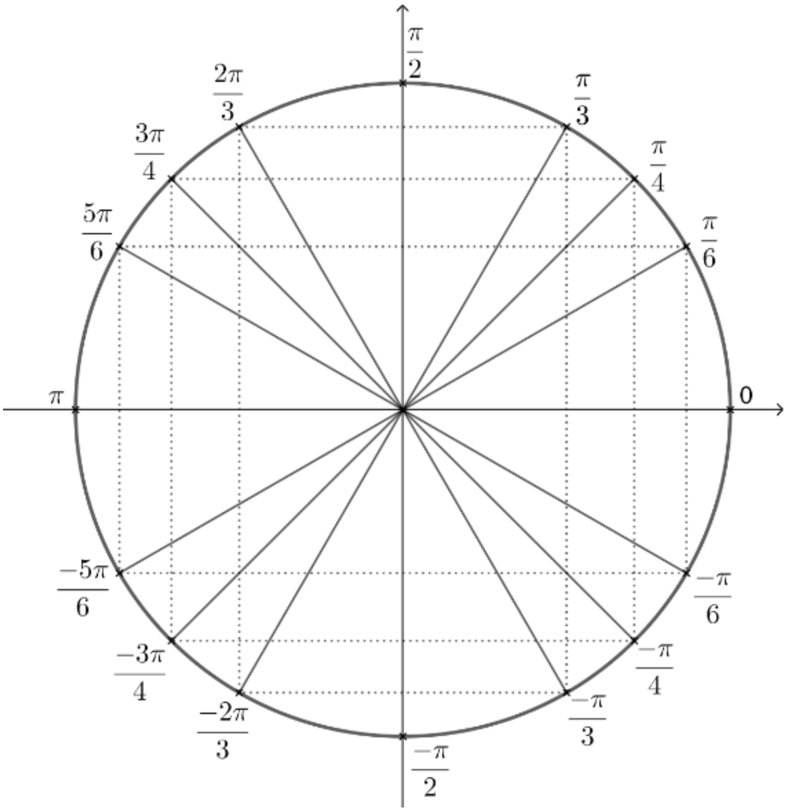


Le cosinus du nombre réel **θ** est l'abscisse du point M.
On le note *cos* (θ).

Le sinus du nombre réel **θ** est l'ordonnée du point M.
On le note *sin* (θ).

On peut même noter $\cos\theta$ et $\sin\theta$ les quantités précédentes.

<u>Valeurs exactes à retenir par ♥♥♥en trigonométrie (d'usage très fréquent ci-après)</u> :



♥♥

θ ***(radians)***	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$cos(\theta)$																
$sin(\theta)$																

♥♥

<u>Exemple d'utilisation</u>

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes décrits ci-dessous :

$z_A \in \mathbb{C}$ tel que $\|z_A\| = 1$ et $\arg(z_A) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ $z_B \in \mathbb{C}$ tel que $\|z_B\| = 1$ et $\arg(z_B) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ $z_C \in \mathbb{C}$ tel que $\|z_C\| = 5$ et $\arg(z_C) = -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ $z_D \in \mathbb{C}$ tel que $\|z_D\| = \frac{1}{3}$ et $\arg(z_D) = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$	$z_E \in \mathbb{C}$ tel que $\|z_E\| = 0{,}5$ et $\arg(z_E) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ $z_F \in \mathbb{C}$ tel que $\|z_F\| = 1{,}8$ et $\arg(z_F) = 0\ [2\pi]$ $z_G \in \mathbb{C}$ tel que $\|z_G\| = 1{,}4$ et $\arg(z_G) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

✂---

c) Déterminer le module et l'argument d'un nombre complexe dont on connaît la forme algébrique.

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul. $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

Preuve :

✂--

Théorème ***(comment déterminer un argument connaissant la forme algébrique).***

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$, où a et b sont deux réels.

Alors, un argument de z est un réel θ tel que : ♥♥♥ $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} = \end{cases}$

Illustration :

Preuve : Conséquence directe de la propriété précédente : en effet :

✂--

Exemples

1) Déterminer le module et l'argument principal de $z = -1 + i\sqrt{3}$.

2) Déterminer le module et l'argument de $z' = 5 - 5i$.

✂--

d) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

1) Egalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont le même module et le même argument modulo 2π.

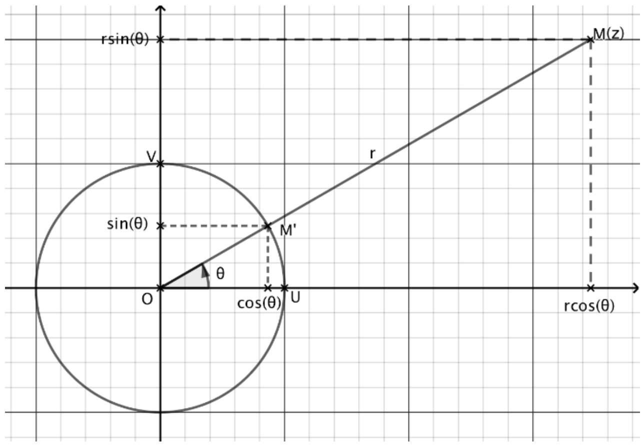
Pourquoi ?

2) Définition

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme suivante :

$\boldsymbol{z = r\,(\,cos(\theta) + i\,sin(\theta)\,)}$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$.

Cette écriture est appelée ***forme trigonométrique de z, ou encore l'écriture trigonométrique de z.***



Exemple

Déterminer la forme trigonométrique du nombre
$z = 2\sqrt{3} + 2i$.
(Le point M de la figure ci-contre est le point image de z).

Méthode : ♥♥♥

Etape 1 : On détermine le module de z, en se souvenant que si $z = a + ib$ où a et b sont deux réels, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Etape 2 : on détermine l'argument principal de z grâce au théorème du paragraphe c) de la page précédente.

Etape 3 : On conclut en donnant la forme trigonométrique cherchée.

Exemple

Déterminer la forme trigonométrique du nombre $z = 3\sqrt{3} - 3i$.

✂---

e) Propriétés des arguments

On se place dans un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$ du plan complexe.

Soit z un nombre complexe non nul.

$arg(\bar{z}) =$

$arg(-z) =$

$arg(-\bar{z}) =$

__Conséquences importantes__ :

Soit z un nombre complexe.

On a les caractérisations par les arguments de :

♥♥♥ z est réel si et seulement si :	♥♥♥
♥♥♥ z est imaginaire pur si et seulement si :	♥♥♥

Enfin :

Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.

Alors : $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A)\ \ [2\pi]$.

__Preuve__ :

Exercice 9

On se place dans un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\,;\ \vec{v}\,)$ du plan complexe.

Dans chacun des cas suivants, déterminer puis construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$a)\ arg(z) = \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

$b)\ arg(z) = \frac{-\pi}{4}\ [\pi]$

✂---

IV- Quelques exercices issus de textes de baccalauréat.

97 On donne les points A et B d'affixes :

$$z_A = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_B = 2i.$$

1. a) Déterminer une forme trigonométrique de z_A et z_B.

b) Placer avec précision ces points sur une figure.

2. F est le point d'affixe $z_F = z_A + z_B$.

a) Placer F sur la figure.

b) Donner la forme algébrique de z_F.

c) Démontrer que OAFB est un losange.

3. a) Justifier que $\widehat{UOF} = \frac{5\pi}{12}$ et écrire une forme trigonométrique de z_F.

b) Démontrer alors que :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

99 À tout point M distinct de O, d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z', tel que

$$z' = \frac{20}{\overline{z}}.$$

1. Déterminer les points A′, B′, C′ associés respectivement aux points :

- A d'affixe $3+4i$;
- B d'affixe $10i$;
- C d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

2. a) Démontrer que $\overrightarrow{OM'} = \frac{20}{|z|^2}\overrightarrow{OM}$.

Qu'en déduit-on pour les points O, M, M′ ?

b) Quel est l'ensemble décrit par le point M′ lorsque M décrit le cercle Γ de centre O et de rayon 1.

Exercice (étude d'une suite à valeurs complexe)

Soit (z_n) la suite définie par : $z_0 = 100$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{i}{2}z_n$.

On note M_n le point d'affixe z_n.

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, les points O, M_n, et M_{n+2} sont alignés.
2) Déterminer le module des trois premiers termes de cette suite.
3) Emettre une conjecture sur l'expression de $|z_n|$ en fonction de n, puis démontrer que cette conjecture est vraie pour tout entier naturel n.
4) Quelle est la limite de la suite $(|z_n|)$ quand n tend vers $+\infty$? Comment interprétez-vous ce résultat d'un point de vue graphique ?
5) A l'aide d'un algorithme, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon 0,01.