Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats : -0,5 sinon.

Règle de bon sens : si je bloque à une question, j'y passe au maximum 5 minutes dessus, puis j'admets le résultat demandé et poursuis l'exercice !

Exercice I (4 *points*)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. **a.** Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. On admet que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variation en y faisant figurer les limites.

3.

Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice II (16 *points*)

Partie A : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + e^{-2x}$.

a) Déterminer, en justifiant, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Etablir que pour tout réel x, la dérivée seconde de f est égale à : $f''(x) = 2(1+2e^{-2x})$.

c) En déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}$ puis donner le sens de variation de f' sur $\mathbb{R}$.

d) Donner, sans justifier, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$. Dresser le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}$.

e) Démontrer avec soin que l'équation : $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α.

f) Donner, en explicitant votre méthode, un encadrement de α à 10^{-2} près.

g) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

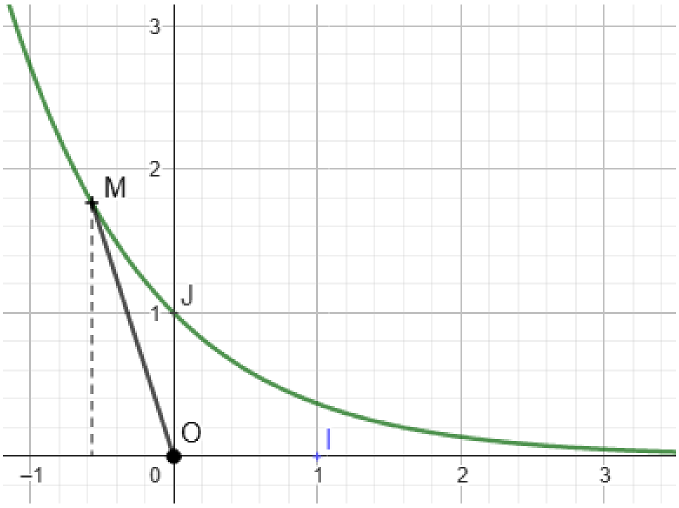
h) Etablir que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, puis prouver que ce minimum égal à $\alpha(\alpha + 1)$.

Partie B : Recherche d'une distance minimale

On se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x}$.

Soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. On définit alors la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \text{OM}$, où OM désigne la distance entre les points O et M. Le graphique ci-joint résume la situation :



a) Etablir que $g(x) = \sqrt{f(x)}$ où f est la fonction définie à la partie A.

b) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$. Les limites ne sont ici pas attendues.

c) En déduire que parmi tous les points situés sur $\mathcal{C}$, il en existe un unique situé le plus proche possible de O. On notera A ce point dont on précisera les coordonnées, en valeur exacte.