Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. -0,5 si copie mal présentée.

***Exercice I* (7 points)**

Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.
Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

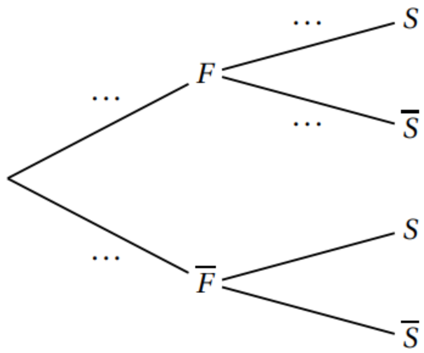
1. Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.

On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les évènements :

- F : « le salarié interrogé est une femme »,
- S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

$\overline{F}$ et $\overline{S}$ désignent respectivement les évènements contraires des évènements F et S.

a. Donner la probabilité de l'évènement S.
b. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.
c. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à $0,208$.
d. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
e. Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.
Justifier l'affirmation du directeur.



2. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

a. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.
b. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

c. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins six salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

d. Calculer à 10^{-4} près la probabilité de l'évènement E : " Moins de trois employés ont suivi le stage ".

e. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter cette dernière dans le contexte de l'exercice.

f. Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**(i, n, p) créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```
def proba(k) :
  P=0
  for i in range(0,k+1) :
    P=P+binomiale(i,20,0.25)
  return P
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice II **(7 *points*)**

Toutes les probabilités, sauf indication contraire, seront arrondies à 10^{-3} dans cet exercice.
« Le virus du chikungunya, transmis à l'homme par la piqûre du moustique tigre provoque chez les patients des douleurs articulaires aiguës qui peuvent être persistantes. En 2005, une importante épidémie de chikungunya a touché les îles de l'Océan Indien et notamment l'île de La Réunion, avec plusieurs centaines de milliers de cas déclarés. En 2007, la maladie a fait son apparition en Europe, puis fin 2013, aux Antilles et a atteint le continent américain en 2014 ».
(https://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya)
Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus.
Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu atteint par le virus ait un test positif est de 0,999 ;
- la probabilité qu'un individu non atteint par le virus ait un test positif est de 0,005.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population cible.
Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'évènement : « l'individu choisi est atteint du chikungunya ».
- T l'évènement : « le test de l'individu choisi est positif ».

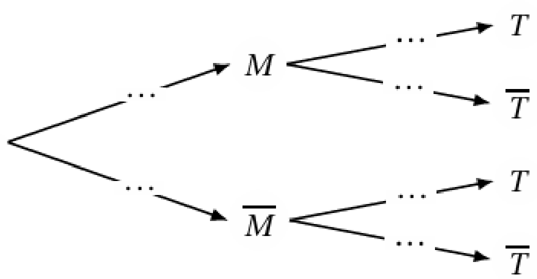
On considère que le test est *fiable* lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus est supérieure à 0,95.

Partie A : Étude d'un exemple

1. Donner les probabilités $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

« En mars 2005, l'épidémie s'est propagée rapidement dans l'ile de La Réunion, avec une flambée importante entre fin avril et début juin puis une persistance de la transmission virale durant l'hiver austral. Au total, 270 000 personnes ont été infectées pour une population totale de 750 000 individus ».
(https://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya)
Fin 2005, le laboratoire a effectué un test de dépistage massif de la population de l'île de La Réunion.
Dans cette partie, la population cible est donc la population de l'ile de La Réunion.

2. Donner la valeur exacte de $P(M)$.
3. Recopier et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous.



4. Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par le virus et ait un test positif.
5. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.
6. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus.
7. Peut-on estimer que ce test est fiable ? Argumenter.

Partie B : Dépistage sur une population cible

Dans cette partie, on note p la proportion de personnes atteintes par le virus du chikungunya dans une population cible.
On cherche ici à tester la fiabilité du test de ce laboratoire en fonction de p.

1. Recopier, en l'adaptant, l'arbre pondéré de la question A3 en tenant compte des nouvelles données.
2. Exprimer la probabilité $P(T)$ en fonction de p.
3. Montrer que $P_T(M) = \dfrac{999p}{994p+5}$.
4. Pour quelles valeurs de p peut-on considérer que ce test est fiable ?

Partie C : Étude sur un échantillon

Pendant l'épidémie, on admet que la probabilité d'être atteint du chikungunya sur l'ile de La Réunion est de 0,36.
On considère un échantillon de n individus choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant le nombre d'individus infectés dans cet échantillon parmi les n tirés au sort.
On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}36$.

a) Exprimer en fonction de n, la probabilité notée p_n, qu'au moins un des n habitants de cet échantillon est atteint par le virus.

b) A l'aide de votre calculatrice, déterminer la taille minimale de l'échantillon pour que $p_n \geq 0{,}99$.

Exercice III **(6 *points*)**

El Niño est un phénomène océanique à grande échelle du Pacifique équatorial qui affecte le régime des vents, la température de la mer et les précipitations sur l'ensemble du globe. Certaines années, ce phénomène est dit « dominant ». Les scientifiques cherchent à modéliser l'apparition de ce phénomène.

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes

Partie A - Premier modèle

À partir d'un échantillon de données, on considère une première modélisation :

— chaque année, la probabilité que le phénomène El Niño soit dominant est égale à 0,4 ;

— la survenue du phénomène El Niño se fait de façon indépendante d'une année sur l'autre.

On note X la variable aléatoire qui, sur une période de 10 ans, associe le nombre d'années où El Niño est dominant.

1. On admet que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. a. Calculer la probabilité que, sur une période de 10 ans, le phénomène El Niño soit dominant exactement 2 années.
   b. Calculer $P(X \leqslant 2)$. Que signifie ce résultat dans le contexte de l'exercice ?
3. Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

Partie B - Second modèle

Après une étude d'un recueil de données plus important sur les 50 dernières années, une autre modélisation apparait plus pertinente :

— si le phénomène El Niño est dominant une année, alors la probabilité qu'il le soit encore l'année suivante est 0,5

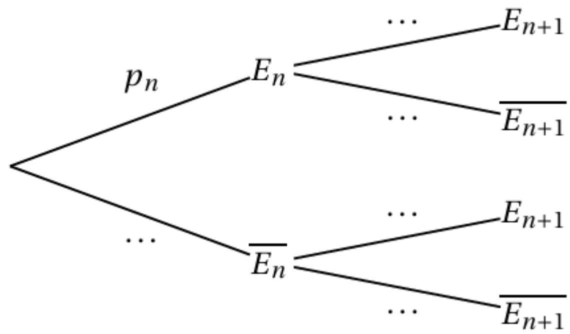
— par contre, si le phénomène El Niño n'est pas dominant une année, alors la probabilité qu'il soit dominant l'année suivante est 0,3.

On considère que l'année de référence est 2023.
On note pour tout entier naturel n :

- E_n l'évènement « le phénomène El Niño est dominant l'année $2023 + n$ » ;
- p_n la probabilité de l'évènement E_n.

En 2023, El Niño n'était pas dominant. On a ainsi $p_0 = 0$.

1. Soit n un entier naturel. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Justifier que $p_1 = 0{,}3$.
3. En vous aidant de l'arbre, montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}3$$

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \dfrac{3}{8}$ pour tout entier naturel n.
   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,2 et préciser son premier terme.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_n = \frac{3}{8}\left(1 - 0{,}2^n\right).$$

   c. Calculer la limite de la suite (p_n).
   d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.