Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. -0,5 si copie mal présentée.

Exercice I **(15 *points*)**

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.
Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.
On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93.
Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.
On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = -0{,}05v_n^2 + 1{,}1v_n.$$

Pour tout entier naturel n,v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ par

$$f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x.$$

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.

5. **a.** Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1) En utilisant votre calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3000 individus. Même question avec la population du milieu B. Aucune justification n'est ici attendue.
2) Expliquer pourquoi, à partir d'une certaine année, que l'on ne cherchera pas à déterminer dans cette question, l'effectif de la population du milieu B dépassera celui de la population A.
3)

On considère le programme Python ci-contre.

a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.

b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
def depassement():
    n=0
    u=6
    v=6
    while .........:
        u=..........
        v=..........
        n=n+1
    return(.......)
```

Exercice II **(5 points)**

Déterminer, en justifiant, si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse :

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

La suite (u_n) sera utilisée dans chacune des affirmations ci-dessous.

Affirmation 1 : $u_2 = 3$.

Pour les affirmations 2 et 3, ***on admet que pour tout entier naturel*** $\boldsymbol{n}$, ***on a*** : $\boldsymbol{n \leq u_n \leq n+1}$.

Affirmation 2 : La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Affirmation 3 : La suite (m_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $m_n = \frac{u_n}{n}$ est convergente.

Affirmation 4 : La suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = u_n - n$ est une suite géométrique.