

Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. $\pm 0,5$ point est réservé en bonus /malus pour la présentation de la copie.

Exercice I (4 points)

f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = xe^{-x}$.

a) Démontrer que pour tout réel x , $f''(x) = (x - 2)e^{-x}$.

b) Etudier la convexité de f sur \mathbb{R}

Exercice II (6 points)

0) Traduire mathématiquement la phrase suivante : une suite (u_n) définie sur \mathbb{N} est minorée par 3.

1) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante, où n est entier naturel : $4^n > 7n + 1$.

a) $\mathcal{P}(0)$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

b) $\mathcal{P}(2)$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

c) Enoncer la propriété \mathcal{P} au rang $n+1$.

2) Voici une fonction en Python :

```
def u(n):  
    u=1  
    for k in range(n):  
        u=(u**3-1)/(2*u+1)  
    return u
```

a) Quelle valeur retourne en sortie cette fonction Python si on tape dans la console :

$u(1)$? $u(2)$? Détaillez vos calculs sur la copie. Et si l'on tapait $u(0)$, quel serait l'affichage en sortie ?

b) Soit (u_n) la suite associée à cette fonction Python. Donner le premier terme ainsi que la relation de récurrence associée à cette suite.

Exercice II (10 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$.

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^n.$$

3) En déduire que la suite (u_n) est majorée par 10.

4) Etudier le sens de variation de la suite (u_n) .