Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. ±0,5 point est réservé en bonus /malus pour la présentation de la copie.

Exercice I (2,5 *points*)

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = -x + 1 + 3e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = \frac{e^{2x}}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice II (5 *points*)

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-2x}$. On note C_f sa courbe représentative, et f' la fonction dérivée de f.

1) En détaillant votre calcul, montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (-2x-1)e^{-2x}$.

2) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variation.

3) Combien C_f admet-elle de tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier.

4) Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f en son point A d'abscisse 0.

5) On <u>admet</u> que la dérivée seconde de f, notée f'', est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = 4xe^{-2x}$.

Etudier, en justifiant, la convexité de f sur $\mathbb{R}$, et déterminer le nombre de points d'inflexion de C_f sur $\mathbb{R}$.

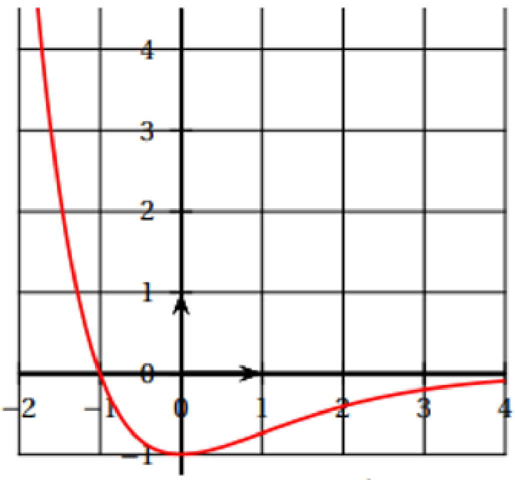
Exercice III (2,5 *points*)

Déterminer en justifiant, à l'aide de la courbe ci-dessous représentant la dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

a) Le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

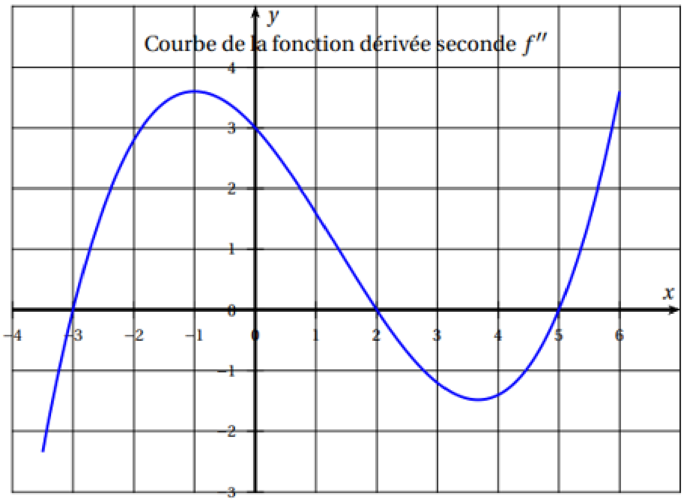
c) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant f en son point d'abscisse 0.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Exercice IV **(1,5 *points*)**

Etudier la convexité de *f* sachant qu'on donne la courbe représentative de sa dérivée seconde sur [-3,5 ; 6]. Combien la courbe de *f* admet-elle de points d'inflexion ? Préciser leurs abscisses.



Exercice V **(4 *points*)**

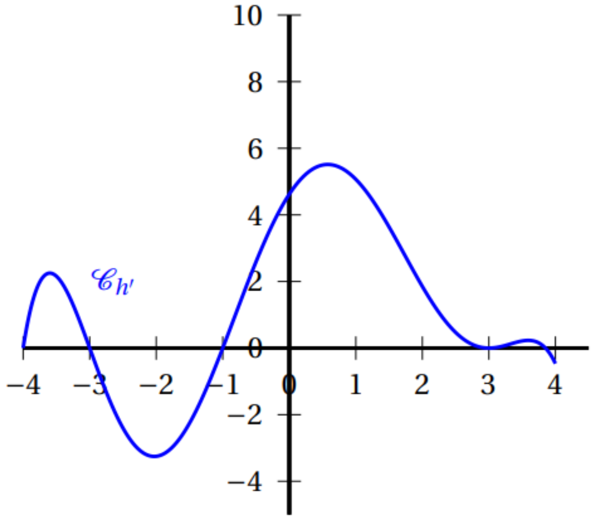
Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse (une réponse non justifiée ne rapporte aucun point) :

La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^3+2x^2-5x+1$.

Affirmation 1 : « Le plus grand intervalle sur lequel *f* est concave est : $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]$».

Pour toute la suite, on se base sur le graphique ci-dessous :

Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-4; 4].
La représentation graphique $\mathscr{C}_{h'}$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-dessous.



On sait de plus que la courbe de h passe par le point A(-2 ; 7).

Affirmation 2 : "Pour tout réel x appartenant à l'intervalle [-1 ; 3], $h'(x) \geqslant 0$".

Affirmation 3 : "La fonction h est croissante sur l'intervalle [-3 ; -1,57]".

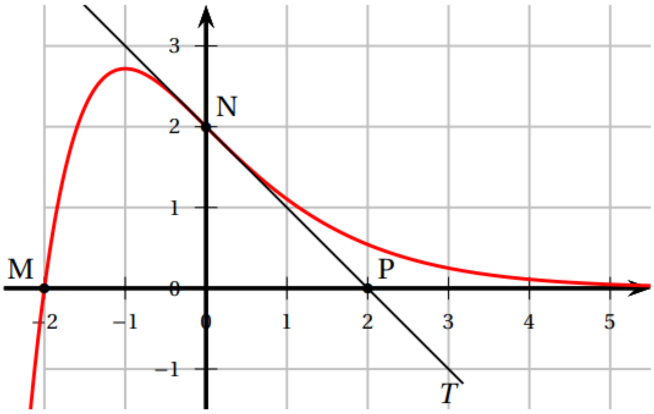
Affirmation 4 : "La tangente à la courbe C_h représentant la fonction h, en son point d'abscisse -2 passe par le point B de coordonnées (0 ; 1)".

Exercice VI **(4,5 *points*)**

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point $\mathrm{N}(0;2)$;
- le point $\mathrm{M}(-2 ; 0)$ appartenant à $\mathscr{C}_f$ et $\mathrm{P}(2;0)$ appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$.



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** Donner $f(0)$.
   b. Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4. Quel est le signe de $f''(1)$? Justifier.

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a,b et λ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.