Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats : -0,5 sinon.

Règle de bon sens : si je bloque à une question, j'y passe au maximum 5 minutes dessus, puis j'admets le résultat demandé et poursuis l'exercice ! Je ne réponds à aucune question, inutile de lever la main.

***Exercice I* (6,5 *points*)**

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E_1): \quad y' + 0{,}48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{120}$.
   Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).
2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}48y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.
À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu.
On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t, exprimé en heure.
On a donc $p(0) = 30$.
On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a $p(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2), alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $\quad y' + 0{,}48y = \dfrac{1}{250}$.
2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1), alors $p = \dfrac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2).
   Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$p(t) = \frac{120}{1 + K\,\mathrm{e}^{-0{,}48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$

3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K.
4. Déterminer $\lim_{t \to +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.

   On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

Exercice II **(7 *points*)**

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle.
Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps.
Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000.
Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0{,}05y - 0{,}5 \qquad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.
2. Comparer les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0{,}05y(1 - 0{,}00125y)$$

On note f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{800}{1 + 15\,\mathrm{e}^{-0{,}05x}}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la fonction f vérifie $f(0) = 50$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$f'(x) = 0{,}05f(x)(1 - 0{,}00125f(x))$$

   On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.
2. Avec ce nouveau modèle f, estimer l'effectif de cette population en 2050. Arrondir le résultat à l'unité.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe C ? Interpréter cette limite dans le cadre de ce problème concret.
4. Justifier que la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

5.

On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f'.

On admet que sur $[0\ ;\ +\infty[$, la dérivée seconde de f est : $f''(x) = \dfrac{30\,\mathrm{e}^{-0{,}05x}}{\left(1 + 15\,\mathrm{e}^{-0{,}05x}\right)^3}\left(15\,\mathrm{e}^{-0{,}05x} - 1\right)$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C.

b. La direction de la réserve affirme :

« Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ». La direction a-t-elle raison ? Justifier.

Exercice III **(6,5 points)**

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Déterminer, en justifiant, si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la dérivée de la fonction f.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1. Pour tout réel x, on a $f'(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}.$$

Affirmation 3. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 4.

Dans une classe de 24 élèves, il y a 14 filles et 10 garçons.
Il est possible de constituer 272 groupes différents de quatre élèves composés de deux filles et deux garçons.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$\mathrm{A}(2\,;0\,;0),\quad \mathrm{B}(0\,;4\,;3),\quad \mathrm{C}(4\,;4\,;1),\quad \mathrm{D}(0\,;0\,;4)\quad \text{et}\quad \mathrm{H}(-1\,;1\,;2).$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$.

Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-y+2z-2=0$.

Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).