Exercice I **(5 *points*)**

1) Calculer les intégrales suivantes (valeur exacte), en détaillant vos calculs :

$\mathbf{I}= \int_0^1 (2e^{3x} - x)dx$ $\mathbf{J}= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{4-e^{-x}}dx$ $\mathbf{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)e^{sin(x)}\,dx$

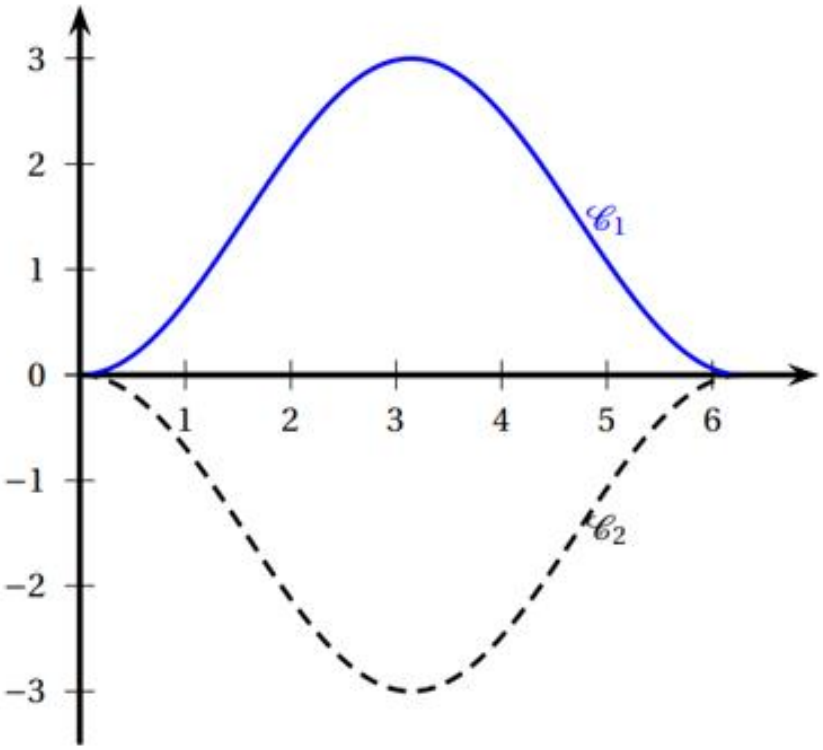
2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer : L = $\int_1^e xln(x)dx$.

Exercice II **(2 *points*)**

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,2\pi]$ par

$$f(x) = -1{,}5\cos(x) + 1{,}5$$

On admet que la fonction f est continue sur $[0\,;\,2\pi]$.
On note $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. Démontrer que la fonction f est positive sur $[0\,;\,2\pi]$.
2. Sur la figure ci-dessus, la courbe tracée en tiretés, notée $\mathscr{C}_2$, est la courbe symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses.
   La forme d'un carreau est celle de la zone délimitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
   On note $\mathscr{A}$ son aire, exprimée en unité d'aire.
   Calculer $\mathscr{A}$.

Exercice III **(5 *points*)**

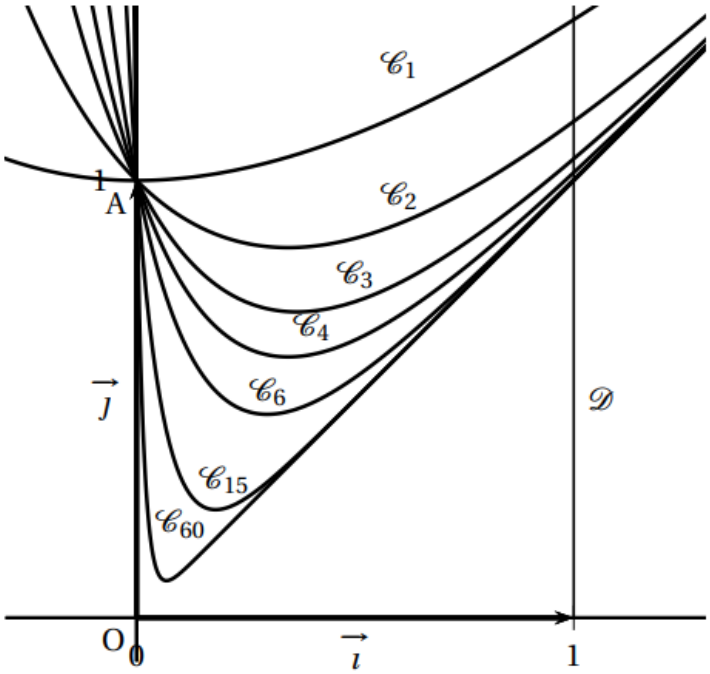
On se propose d'étudier la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right) \mathrm{d}x.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 1$.



a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right) \mathrm{d}x.$$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).*

Exercice IV **(6 *points*)**

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

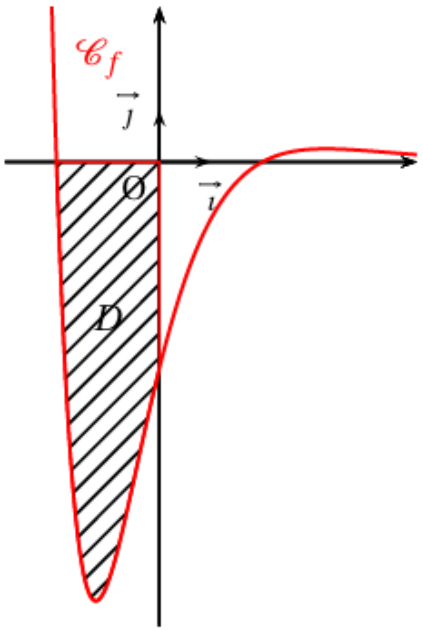
1. Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
   Le domaine D du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D.

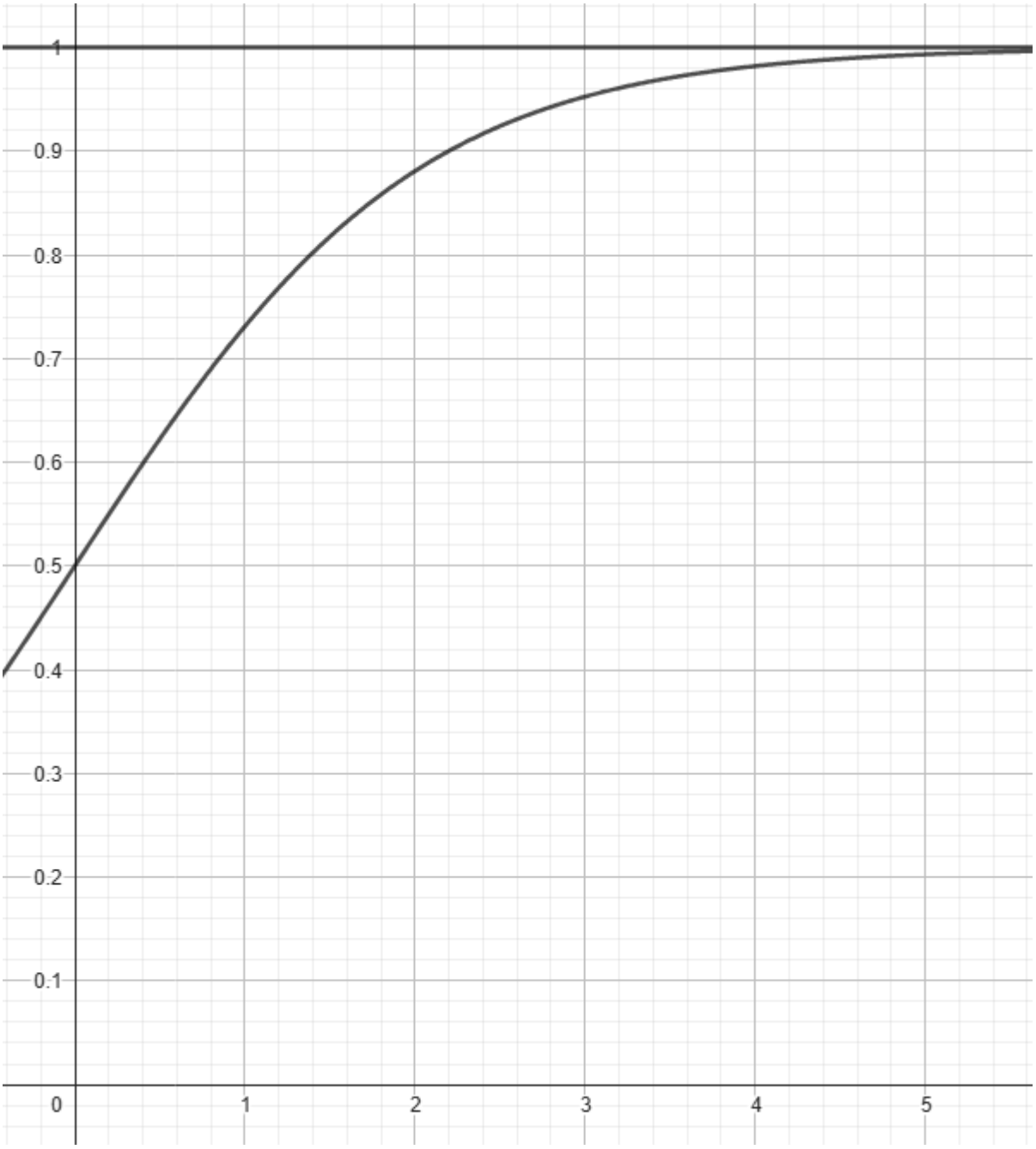


Exercice V **(2 *points*)**

f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

On admet que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

a) Etudier la position relative de la courbe de f et de son asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

b) Soit a un réel strictement positif. Représenter sur le graphique ci-dessous le domaine noté D_a compris entre la courbe de f, son asymptote, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = a$.

c) Le domaine D_a admet-il une aire finie lorsque a tend vers $+\infty$? Justifier.