

***Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats : -0,5 sinon.***

***Règle de bon sens : si je bloque à une question, j'y passe au maximum 5 minutes dessus, puis j'admets le résultat demandé et poursuis l'exercice !***

***Je ne réponds à aucune question durant le devoir.***

**Exercice I (5 points)**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = e^{\sqrt{x}}$ .
  - a. Montrer que  $g'(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
  - b. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , calculer  $f'(x)$  et montrer que :

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2.
  - a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en 0.
  - b. Interpréter graphiquement ce résultat.
3.
  - a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
  - b. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .  
Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
  - c. Montrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  et donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de cette solution.

4.

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  et que :

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}.$$

- a. En posant  $X = \sqrt{x}$ , montrer que  $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$  pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
- b. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

### **Exercice II (5 points)**

Le Kinball est un jeu canadien dans lequel deux équipes se passent un gros ballon. Le but du jeu est d'obliger l'équipe adverse à faire tomber le ballon au sol.

Dans ce sport, tous les joueurs d'une même équipe ont le même rôle.

Alice entraîne un club de Kinball qui compte 42 adhérents.

Pour participer à un championnat, elle doit choisir 10 des adhérents du club.

1. Combien de choix possibles Alice a-t-elle pour sélectionner 10 joueurs de son club ?
2. Il y a 22 femmes et 20 hommes dans son club.
  - a. Combien Alice a-t-elle de choix possibles, si elle tient à avoir une équipe à parité (autant de femmes que d'hommes) ?
  - b. Combien Alice a-t-elle de choix possibles, si elle tient à avoir une équipe exclusivement féminine ?
  - c. Combien Alice a-t-elle de choix possibles, si elle tient à avoir une équipe mixte (au moins une femme et au moins un homme) ?
  - d. Calculer la probabilité que dans l'équipe de 10 personnes sélectionnées il y ait deux femmes de plus que d'hommes. On Donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée arrondie au millième près.

### **Exercice III (4 points)**

- 1) En France, depuis le 01/01/2009, les plaques d'immatriculations actuelles sont de la forme : un bloc de deux lettres, suivies d'un bloc de trois chiffres autre que le bloc 000, suivi d'un bloc de deux lettres. Les lettres sont prises dans l'alphabet et sont autres que O et I, pour ne pas les confondre avec 0 et 1.  
Par exemple, AB-035-ZT est une immatriculation possible.  
Combien de plaques d'immatriculations peut-on créer avec ce système d'immatriculation ?
- 2) Quelle est la probabilité que la plaque contienne dans un seul bloc une lettre double ? Par exemple BB-123-RY.
- 3) Combien de plaques ont leur troisième bloc de lettres identiques et dans le même ordre que celles du premier bloc ? Par exemple : BC-280-BC.
- 4) Combien de plaques ont leurs trois chiffres pairs et que des voyelles dans chacun des deux blocs ? Par exemple : AE-804-UY.

### **Exercice IV (2 points) (Les deux questions sont indépendantes).**

a) Factoriser :  $n! + (n+1)!$ .

d) Un jeu de grattage est formé d'un gros carré décomposé en 9 petites cases carrées, toutes recouvertes d'un enduit à gratter. 3 cœurs sont placés aléatoirement sur les 9 cases carrées, les autres cases étant vides : on gagne si les trois cœurs sont sur une même ligne, ou une même colonne, ou une même diagonale.

Voici un exemple de telle grille grattée (et perdante) :

	♥	
♥		
		♥

Déterminer combien de grilles on peut former, ainsi que la probabilité de gagner à ce jeu de grattage.

### **Exercice VI (1 point)**

On lance une pièce de monnaie non truquée 10 fois d'affilée.

Calculer la probabilité d'obtenir pile pour la troisième fois lors du dixième lancer.

Détailler la démarche, donner la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à  $10^{-3}$  près.

### **Exercice VII (3,5 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse :

1. Soient  $E$  et  $F$  les ensembles  $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$  et  $F = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$ .

**Affirmation n° 1 :** Il y a davantage de 3-uplets d'éléments distincts de  $E$  que de combinaisons à 4 éléments de  $F$ .

2. Deux groupes de personnes sont respectivement constitués de 20 individus et 30 individus. Chaque individu des deux groupes serre une seule fois la main des individus de l'autre groupe.

**Affirmation n° 2 :** Il y a eu 50 serrages de mains.

3.

Matt fait un loto le 16/01/2026. On rappelle que remplir une grille de loto revient à choisir 5 numéros dans une grille numérotée de 1 à 49 ainsi qu'un numéro chance de 1 à 10.

**Affirmation n°3 :** La probabilité qu'aucun des numéros sortis (les cinq numéros ainsi que le numéro chance) lors du tirage du 16/01/2026 ne ressortent lors du tirage du 23/01/2026 est égale à 0,513 arrondi au millième près.

4. A l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 90 filles. Déterminer le nombre de classements possibles des 10 premiers admis et qui a comme podium (= trio de tête) trois filles.

**Affirmation n°4 :** Le nombre de façons de classer les 10 premiers admis est égal à :  $\frac{90! \times 157!}{87! \times 160!}$

5. **Affirmation n°5 :** Avec l'alphabet usuel, on peut écrire 456976 mots palindromes de 7 lettres.

On rappelle qu'un palindrome est un mot qui a le même sens, qu'on le lise de droite à gauche ou de gauche à droite. Par exemple, BATSTAB est un mot palindrome de 7 lettres.

**Exercice VIII (2 points)**

Un groupe est constitué de 8 amis. La durée d'une année est supposée égale à 365 jours.

En détaillant votre démarche, calculer la probabilité des événements suivants, dont on donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée arrondie à votre choix à préciser :

E : “ Exactement deux des amis ont la même date d'anniversaire (même jour et même mois) ”.

A : “ Au moins deux des 8 amis ont la même date d'anniversaire ”.