

Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats : -0,5 sinon.

Règle de bon sens : si je bloque à une question, j'y passe au maximum 5 minutes dessus, puis j'admets le résultat demandé et poursuis l'exercice ! Je ne réponds à aucune question, inutile de lever la main.

Exercice d'échauffement (3 points)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $2e^{5x} - 6 < 0$.

b) $\ln(x + 1) = \ln(2x + 11)$

c) $\ln(e^{-x} + 1) = 4$.

Exercice 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
4.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α , sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - b. Donner un encadrement du réel α d'amplitude 0,01.
 - c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

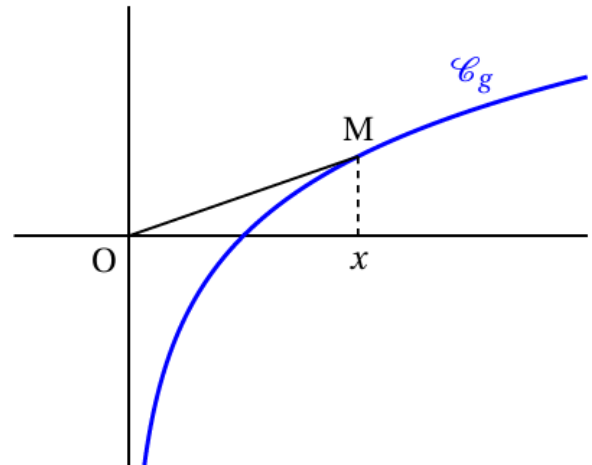
5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O . On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x . On note OM la distance entre les points O et M .

- Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x .
- Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α .
- La valeur minimale de la distance OM , lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0 ; +\infty[$, est appelée distance du point O à la courbe $\mathcal{C}_g$. On note d cette distance.

Exprimer d à l'aide de α .



Exercice II (3 points)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; 8]$ par

$$f(x) = \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}$$

Soit C_f la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2 + 7x + 8 \geq 0$.
- En déduire que pour tout $x \in]0 ; 8]$, on a $f(x) \geq 0$.
- Interpréter graphiquement ce résultat.

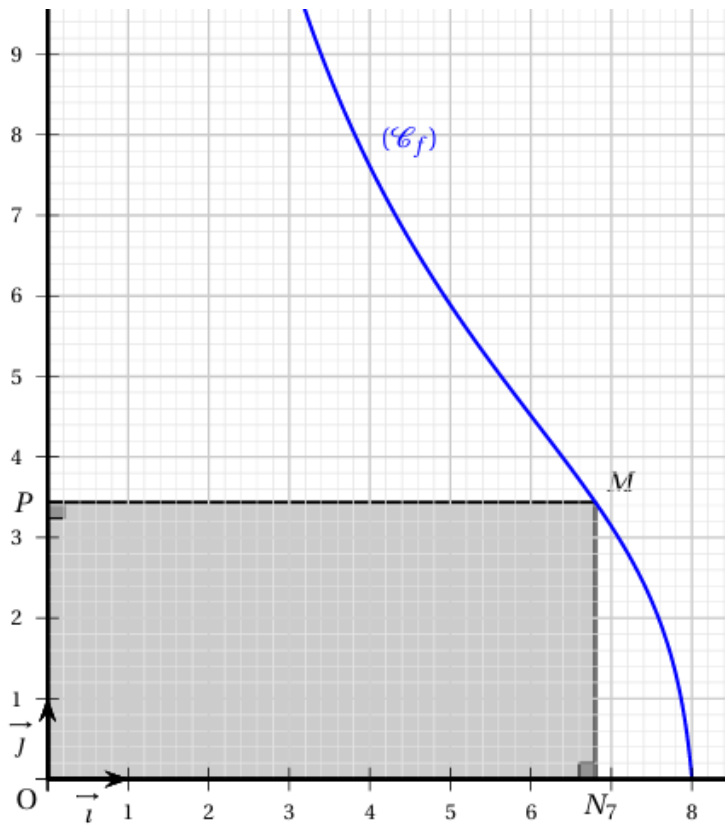
Partie B

La courbe C_f est représentée ci-dessous.

Soit M le point de C_f d'abscisse x avec $x \in]0 ; 8]$.

On appelle N et P les projetés orthogonaux du point M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'aire $\mathcal{A}(x)$ du rectangle $ONMP$.



1. Donner les coordonnées des points N et P en fonction de x .
2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 8]$,

$$\mathcal{A}(x) = 10 \ln(-x^2 + 7x + 9)$$

3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale? Si elle existe, déterminer cette position.

Partie C : Etudier la convexité de $\mathcal{A}$. (Question bonus).

Exercice III (7 points)

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = \ln(4) \\ v_{n+1} = \ln(-1 + 2e^{v_n}) \end{cases} \text{ et } w_n = -1 + e^{v_n}.$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie et à valeurs strictement positives.

1. Donner les valeurs exactes de v_1 et w_0 .

2. a. Une partie d'une feuille de calcul où figurent les indices et les termes des suites (v_n) et (w_n) est reproduite ci-contre.

Parmi les trois formules ci-dessous, choisir la formule qui, saisie dans la cellule B3 puis recopiée vers le bas, permettra d'obtenir les valeurs de la suite (v_n) dans la colonne B.

Formule 1	LN(-1 + 2 * EXP(B2))
Formule 2	= LN(-1 + 2 * EXP(B2))
Formule 3	= LN(-1 + 2 * EXP(A2))

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (v_n) .

c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, valider votre conjecture concernant le sens de variation de la suite (v_n) .

	A	B	C
1	n	v_n	w_n
2	0	1,38629436	3
3	1	1,94591015	6
4	2	2,56494936	12
5	3	3,21887582	24
6	4	3,8918203	48
7	5	4,57471098	96
8	6	5,26269019	192
9	7	5,95324333	384
10	8	6,6450909 7	768
11	9	7,33758774	1536
12	10	8,03040956	3072
13	11	8,72339402	6144
14	12	9,41645983	12288
15	13	10,1095663	24576
16	14	10,8026932	49152
17	15	11,4958302	98304
18	16	12,1889723	196608
19	17	12,8821169	393216

3. a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

b. En déduire que pour tout entier naturel n , $v_n = \ln(1 + 3 \times 2^n)$.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n) .

4. Justifier que l'algorithme suivant écrit en langage Python renvoie un résultat quel que soit le choix de la valeur du nombre S.

```
from math import*
def seuil(S):
    V=ln(4)
    n=0
    while V < S :
        n=n+1
        V=ln(2*exp(V)-1)
    return(n)
```