***Nota bene* : ce travail est à rendre pour le 20 Janvier. Vous rendrez *un seul lot* de copies DOUBLES par groupe de 2 à 6 élèves, avec *les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe* sur *chaque copie du lot*. Ce travail permet de revoir les fonctions, limites et surtout de travailler le dénombrement.**

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + x$.

1) Déterminer, en justifiant, les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.

2) On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{-x}.$$

b. En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

c. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

d. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

On note α cette solution.

e. Donner un encadrement de α au centième près, puis la valeur approchée de α à $10^{-1} près$.

f. Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice II

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \binom{2n}{n}$. Déterminer en justifiant : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2) Sans calculatrice, écrire sous forme de fraction irréductible : $B = \dfrac{8! - 7!}{8! + 7!}$

3) Démontrer que pour tous entiers k et p tels que : $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq p \leq n$: $\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{n-p} = \binom{n}{p} \times \binom{p}{k}$.

***Exercice III* (pour travailler le dénombrement)**

Exercice numéro 27 page 65 du livre.

Exercice IV

Exercice numéro 33 page 66 du livre.

Exercice V

Exercice numéro 72 page 72 du livre.

Exercice VI

Dans une classe, les 36 élèves doivent élire un comité formé par quatre élèves de la classe.

1) On suppose que les quatre élèves élus auront le même rôle au sein du comité.
a) Combien de comités différents de quatre élèves la classe peut-elle élire ?
b) On sait de plus qu'il y a 20 filles dans cette classe. Déterminer le nombre de comités que l'on peut élire et qui respecte la parité.
c) Déterminer le nombre de comités dans lesquels il y a plus de filles que de garçons.

2) Cette fois-ci on suppose qu'au sein du comité élu, il y aura un président, un vice-président, un secrétaire, et un trésorier.

Reprendre les questions a) et b) de la question 1).

Exercice VII

Exercice numéro 70 page 72 du livre.

Exercice VIII

Considérons le prénom : TINA.

a) Combien y-a-t-il d'anagrammes (mot utilisant les mêmes lettres sans avoir forcément de sens) de ce prénom ? Justifier.

b) Même question avec le mot : ABOIEMENT. Justifier.

c) Combien de mots de 4 lettres peut-on former en s'imposant d'utiliser uniquement des lettres du mot ABOIEMENT ?

d) Combien d'anagrammes commençant par une consonne peut on créer avec les lettres du mot MISSISSIPI ?

Exercice IX

12 voitures sont garées en bataille (voiture positionnée à angle droit avec le trottoir). 3 sont de couleur rouge. Quelle est la probabilité que les voitures rouges soient garées côte à côte ?

A partir de l'exercice IX, tout est facultatif mais demeure fort intéressant.

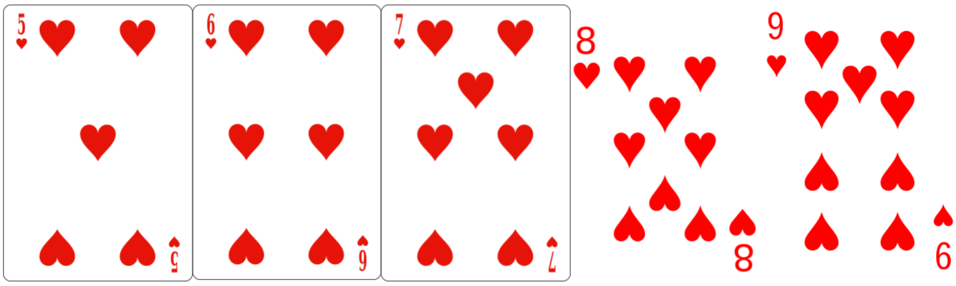
Exercice X **(*peut fournir des idées pour un thème de développement au grand oral*)**

Attention : On prend un jeu de poker constitué de 52 cartes usuelles.

Exercice numéro 45 page 67 du livre plus les questions suivantes :

4) Toujours dans le cadre du poker, on appelle *quinte flush,* 5 cartes consécutives d'une même famille.

Par exemple*,* la main suivante est une *quinte flush* :



Déterminer le nombre de *quintes flush* que l'on peut former, puis la probabilité d'avoir une *quinte flush* entre les mains.

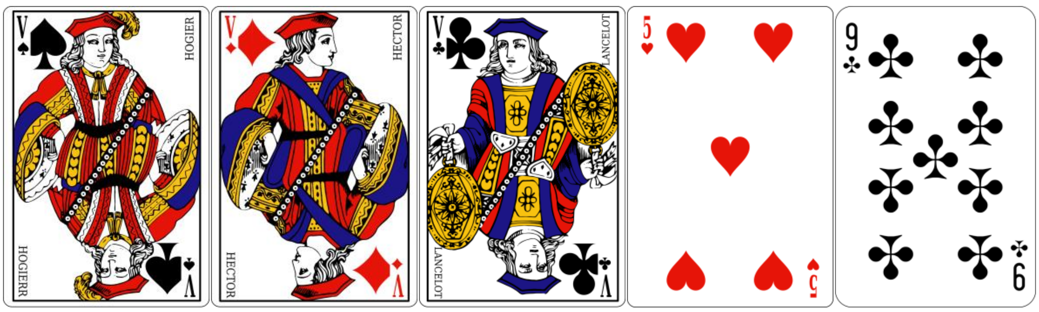
5) Un *full* est une main de 5 cartes constituée de trois cartes de la même valeur et de deux cartes d'une autre valeur.

<u>Exemple de full</u> :

Dénombrer le nombre de mains formant un *full*, puis la probabilité d'avoir un *full* entre ses mains.

6) Un *brelan* est une main de cinq cartes, constituée de trois cartes de la même valeur, et de deux autres cartes ne formant ni un carré ni un *full* avec les trois cartes de même valeur.

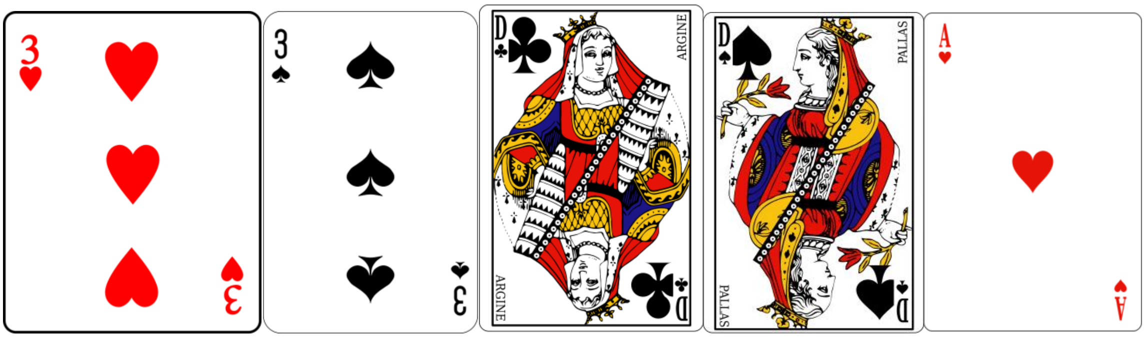
<u>Exemple de brelan</u> :



Dénombrer les mains formant un *brelan*, puis déterminer la probabilité d'avoir un *brelan* entre ses mains.

7) On appelle double paire, deux fois deux cartes de même valeur, ne formant pas avec les autres cartes un *full.*

<u>*Exemple de double paire*</u> :



Dénombrer les mains contenant une double paire, puis déterminer la probabilité d'avoir une double paire entre ses mains.

<u>***Exercice XI***</u>**(*Peut fournir des idées pour un beau thème de développement au grand oral, surtout l'application sur les chapeaux*).**

n désigne un entier naturel non nul.

Soit E = $\{x_1\,;\, x_2\,;\, \ldots.;\, x_n\}$ un ensemble de cardinal n.

Soit σ (sigma minuscule) une permutation des éléments de E, c'est à dire une application ***bijective*** de E dans E, c'est-à-dire que ***chaque élément de E a un <u>unique</u> antécédent dans E par σ.***

On notera σ sous la forme : $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots\ldots & x_n \\ x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)} & \ldots\ldots & x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

Par exemple, si $n = 3$ et E $= \{1\;;2\;;3\}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est la permutation de E définie par :

$\sigma(1) = 2\;;\; \sigma(2) = 1$ et $\sigma(3) = 3$.

$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une autre permutation de E définie par : $\sigma'(1) = 3\;;\; \sigma'(2) = 1$ et $\sigma'(3) = 2$.

Dans un ensemble de cardinal n, il y a donc $n!$ permutations (*cf.* cours).

On appelle ***point fixe*** d'une permutation σ de E tout élément de E ***qui est invariant*** **(*ne change pas de valeur*)** en lui appliquant σ.

L'élément x_k de E est un point fixe pour σ lorsque $\sigma(x_k) = x_k$.

Par exemple, pour la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 3 est l'unique point fixe pour σ.

La permutation $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'admet aucun point fixe.

Enfin, on appelle ***dérangement* (de E), *toute permutation de E n'ayant aucun point fixe*.**

C'est par exemple le cas de $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On notera D_n le nombre de dérangements de E, lorsque E est un ensemble de cardinal n, en convenant que $D_0 = 1$.

1a) Pourquoi $D_1 = 0$?

1b) Dresser la liste des permutations d'un ensemble de cardinal 2, puis déterminer la valeur de D_2.

1c) Déterminer de même la valeur de D_3.

2a) Soit k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n$, et soit u_k le nombre de permutation de E ayant k points fixes.

Etablir que $u_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times D_{n-k}$.

2b) En déduire l'identité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$$

2c) Déterminer alors successivement les valeurs : D_4 ; D_5 ; D_6 ; D_7 ; D_8 ; D_9 et D_{10}.

3) *Application intéressante*

10 personnes participent à une teuf, chacune est venue avec un chapeau.

En partant, chacune prend au hasard un chapeau.

Déterminer la probabilité qu'aucune des personnes ne reparte avec le chapeau avec lequel elle était arrivée. Arrondir à 0,01 près.

Comparer la valeur de cette probabilité à celle de l'événement : *"au moins une des personnes repart avec le chapeau avec lequel elle était arrivée"*.

Exercice XII **(*A faire si vous visez une CPGE, les trois questions sont indépendantes*).**

1) Une pièce de monnaie non truquée est lancée infiniment.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir n fois pile (non nécessairement consécutives), où n est un entier naturel fixé.

Par exemple si on a comme tirage : P-F-F-P-P-F-P et que $n = 1$, alors X = 1 ; si $n = 2$, alors X = 4 ; si $n = 3$ alors X = 5 etc.

Déterminer l'ensemble Ω des valeurs prises par X, puis calculer la probabilité que X prenne la valeur k, où $k \in \Omega$.

2) Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que le produit de p entiers consécutifs est toujours divisible par p !

3) Quel est le cardinal de l'ensemble : $\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leq n\}$