

Nota bene : ce travail est à rendre pour le 6 Janvier. Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 à 5 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Déterminer, en justifiant, chacune des limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^x \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - e^x) \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}) \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2}\right) \quad e) \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x \sin(x)) \quad f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,1x}}{2x}$$

Exercice II

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^{2x} - 2}{e^{3x} + 1}$

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ en justifiant, et interpréter graphiquement ces résultats.

Exercice III

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, de chute de la goutte

en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie sur $[0 ; +\infty[$ par $v(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$. La constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.

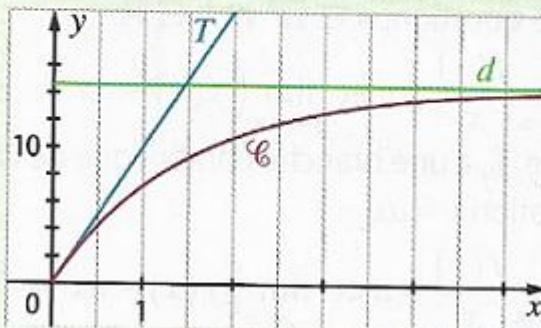
2. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}$.

Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.

3. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $5 \frac{m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?



4. On nomme \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction v .
- Justifier que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote d horizontale. En donner une équation.
 - Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
 - Calculer l'abscisse du point d'intersection de T .
5. On a représenté \mathcal{C} , T et d sur le graphique ci-dessous.



Quelle est la valeur de $\frac{m}{k}$? Justifier.

Exercice IV

f est une fonction définie sur $[-8 ; 8]$, dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-8	-2	3	8
Variations de f	5	-4	2	1

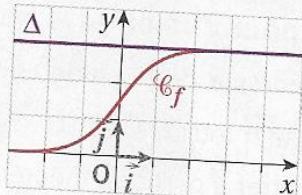
- Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ n'admet aucune solution sur $[-2 ; 8]$.
- Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution sur $[-8 ; -2]$.
- Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[-8 ; 8]$.

Exercice V

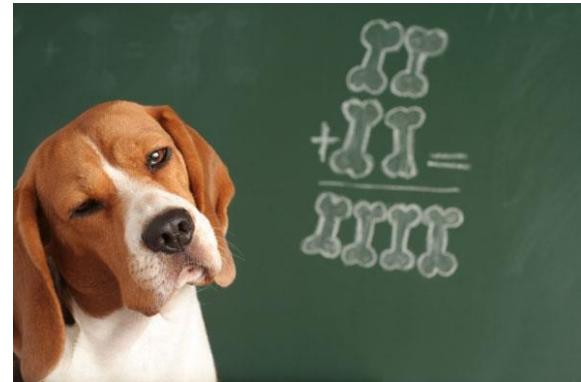
On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}.$$

On a tracé, dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



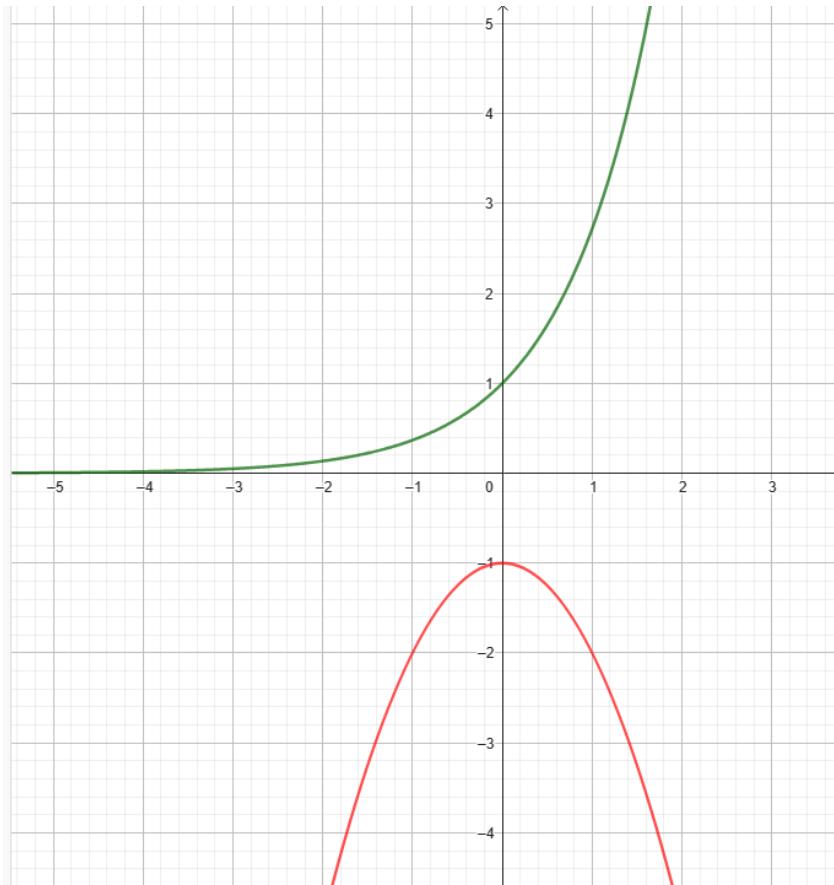
- Justifier que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f .
- Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} .
- Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .



Exercice VI

Dans un repère orthogonal du plan, soit C_1 et C_2 les courbes d'équations respectives : $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$.

- 0- Identifier sur le graphique ci-dessous les courbes C_1 et C_2 , puis conjecturer si ces deux courbes admettent une tangente commune, en précisant approximativement l'abscisse du (des) point(s) de contact avec chacune de ces deux courbes.



1. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point de C_1 d'abscisse a et par B le point de C_2 d'abscisse b .

- a. Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe C_1 au point A , puis de la tangente T_B à la courbe C_2 au point B .
- b. En déduire que ces droites sont confondues si et seulement si

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}$$

- c. Montrer que ce système équivaut à

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$$

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4.$$

On va montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

- a. Montrer que pour $x < 0$, on a $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x - 1) < 0$. En déduire que l'équation n'a pas de solution sur $]-\infty; 0[$.
- b. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
- c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[0; +\infty[$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a .
3. On prend pour A le point d'abscisse a . Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites T_A et T_B sont confondues.

BONUS (facultatif, pour se préparer au post bac.)

- 0- Discuter du nombre de points d'intersection entre la courbe de la fonction cube et celle d'une fonction affine.

1-

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, une fonction continue.

Montrer que f a au moins un point fixe sur $[0 ; 1]$, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0 ; 1]$.