

**Nota bene :** ce travail est à rendre pour le 6 Janvier. Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 à 5 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

**Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.**

### Exercice I

Déterminer, en justifiant, chacune des limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^x \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - e^x) \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}) \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2}\right) \quad e) \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x \sin(x)) \quad f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,1x}}{2x}$$

### Exercice II

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^{2x} - 2}{e^{3x} + 1}$

Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  en justifiant, et interpréter graphiquement ces résultats.

### Exercice III

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en  $m \cdot s^{-1}$ , de chute de la goutte

en fonction de la durée de chute  $t$  est donnée par la fonction  $v$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $v(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ . La constante  $m$  est la masse de la goutte en milligramme et la constante  $k$  est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.

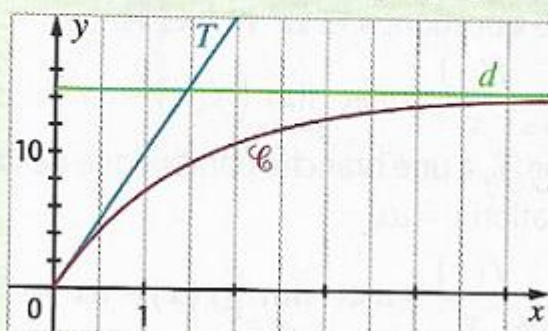
2. Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}$ .

Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.

3. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à  $5 \frac{m}{k}$ , la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?



4. On nomme  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $v$ .
- a. Justifier que la courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote  $d$  horizontale. En donner une équation.
- b. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.
- c. Calculer l'abscisse du point d'intersection de  $T$ .
5. On a représenté  $\mathcal{C}$ ,  $T$  et  $d$  sur le graphique ci-dessous.



Quelle est la valeur de  $\frac{m}{k}$  ? Justifier.

#### Exercice IV

$f$  est une fonction définie sur  $[-8 ; 8]$ , dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

$x$	-8	-2	3	8
Variations de $f$	5	-4	2	1

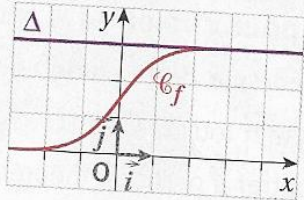
- a. Démontrer que l'équation  $f(x) = 3$  n'admet aucune solution sur  $[-2 ; 8]$ .
- b. Justifier que l'équation  $f(x) = 3$  admet une unique solution sur  $[-8 ; -2]$ .
- c. Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions sur  $[-8 ; 8]$ .

### Exercice V

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}.$$

On a tracé, dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 3$ .

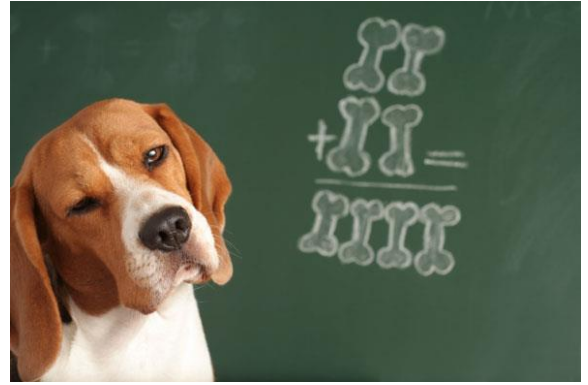
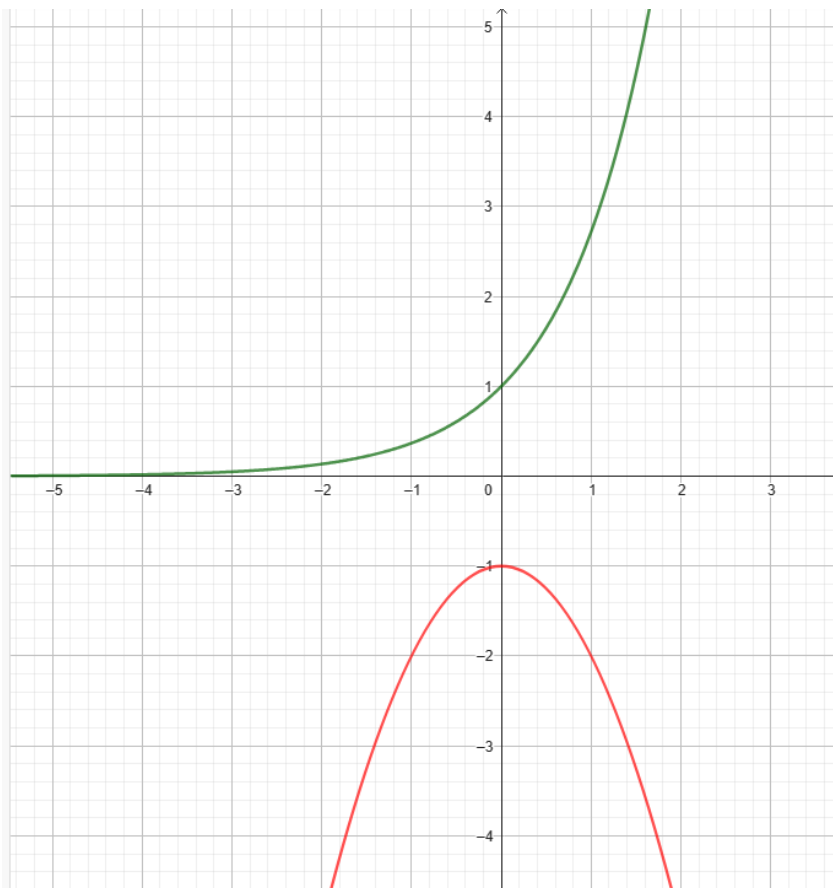


- Justifier que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Justifier que la droite  $\Delta$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- Démontrer que l'équation  $f(x) = 2,999$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

### Exercice VI

Dans un repère orthogonal du plan, soit  $C_1$  et  $C_2$  les courbes d'équations respectives :  $y = e^x$  et  $y = -x^2 - 1$ .

- 0- Identifier sur le graphique ci-dessous les courbes  $C_1$  et  $C_2$ , puis conjecturer si ces deux courbes admettent une tangente commune, en précisant approximativement l'abscisse du (des) point(s) de contact avec chacune de ces deux courbes.





1. On désigne par  $a$  et  $b$  deux réels quelconques, par  $A$  le point de  $C_1$  d'abscisse  $a$  et par  $B$  le point de  $C_2$  d'abscisse  $b$ .
  - a. Déterminer une équation de la tangente  $T_A$  à la courbe  $C_1$  au point  $A$ , puis de la tangente  $T_B$  à la courbe  $C_2$  au point  $B$ .
  - b. En déduire que ces droites sont confondues si et seulement si

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}$$

- c. Montrer que ce système équivaut à

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$$

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4.$$

On va montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution.

- a. Montrer que pour  $x < 0$ , on a  $e^{2x} - 4 < 0$  et  $4e^x(x - 1) < 0$ . En déduire que l'équation n'a pas de solution sur  $] -\infty; 0[$ .
  - b. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
  - c. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $a$  sur  $[0; +\infty[$  et donner un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $a$ .
3. On prend pour  $A$  le point d'abscisse  $a$ . Déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  du réel  $b$  pour lequel les droites  $T_A$  et  $T_B$  sont confondues.

**BONUS (facultatif, pour se préparer au post bac.)**

- 0- Discuter du nombre de points d'intersection entre la courbe de la fonction cube et celle d'une fonction affine.

I-

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , une fonction continue.

Montrer que  $f$  a au moins un point fixe sur  $[0 ; 1]$ , c'est-à-dire que l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution sur  $[0 ; 1]$ .