***Nota bene* : ce travail sur les probabilités est à rendre pour le 25 Novembre. Vous rendrez *un seul lot* de copies DOUBLES par groupe de 3 à 6 élèves, avec *les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe* sur *chaque copie du lot*.**

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul. Tous les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

Une entreprise décide d'offrir à certains clients qui se connectent sur son site de vente en ligne une remise de 5 euros sur leur prochain achat.

La distribution des bons d'achat est programmée de la manière suivante :

- la probabilité que le premier client connecté obtienne un bon d'achat est $\frac{1}{5}$;
- si le $n^{\text{ème}}$ client connecté gagne un bon d'achat, alors le client suivant gagne également un bon d'achat avec une probabilité de $\frac{3}{10}$;
- si le $n^{\text{ème}}$ client connecté ne gagne pas de bon d'achat, alors le client suivant ne gagne pas non plus de bon d'achat avec une probabilité de $\frac{9}{10}$.

On considère les événements suivants :

A_n : « le $n^{\text{ème}}$ client connecté gagne un bon d'achat de 5 euros »

$\overline{A_n}$: « le $n^{\text{ème}}$ client connecté ne gagne pas un bon d'achat de 5 euros ».

On note $a_n = P(A_n)$.

I-1- Donner la valeur de a_1.

I-2- Compléter l'arbre de probabilités donné dans la feuille de réponses.

I-3- Exprimer $P(A_{n+1} \cap A_n)$ et $P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de a_n.

I-4- En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{10}$. Justifier la réponse.

Dans la suite, on pose $u_n = a_n - \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel n non nul.

I-5-a- Calculer u_1.

I-5-b- Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison q.

I-6-a- Pour tout entier naturel n non nul, en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

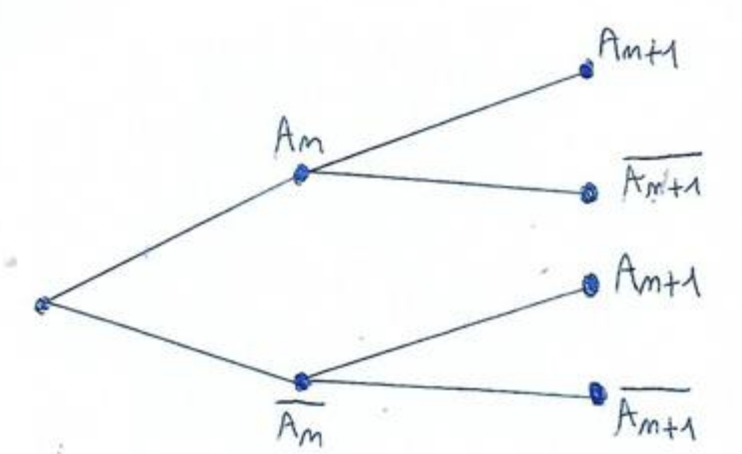
I-6-b- Montrer que $a_n = \frac{3}{8\times 5^n} + \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel n non nul.

I-7- Justifier que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente et donner sa limite l.

I-8-a- Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n > \frac{1}{8}$.

Interprétez la limite obtenue à la question 7) dans le cadre de l'exercice.

__Arbre de la feuille réponse__ : (à rendre avec la copie)



Exercice II

Une enquête porte sur les 1200 salariés d'une entreprise constituée de 3 étages, et on s'intéresse à deux choses :

- ✓ A quel étage est situé le bureau dans lequel travaille chaque salarié ?
- ✓ Pour se rendre à son bureau, un salarié prend-il l'escalier ou l'ascenseur ?

Chaque salarié est interrogé et voici les résultats obtenus :

- 900 personnes utilisent l'ascenseur, et parmi celles-ci, 200 vont au premier étage, 300 au second étage, et 400 au troisième étage.
- Les autres personnes utilisent les escaliers, et parmi celles-ci, un tiers va au second étage et les autres vont au premier étage.

On choisit au hasard une personne de cette entreprise.
On notera : E_1 l'événement : *" La personne va au premier étage"*.
E_2 : *" La personne va au second étage"* et E_3 : *" La personne va au troisième étage"*.
A : *" La personne prend l'ascenseur"*.

1*a*) Faire un arbre de probabilités qui traduit les données de l'énoncé.

1*b*) Calculer $p(\overline{A} \cap E_2)$ et interprétez concrètement le résultat.

1*c*) Démontrer que les événements E_1, E_2 et E_3 sont équiprobables.

1*d*) Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au deuxième étage.
2) A présent, on interroge 60 personnes de cette entreprise. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de personnes, qui parmi les 60 interrogées, vont au second étage.
a) Déterminer en justifiant, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Déterminer, au ***dix-millième près***, la probabilité que 15 personnes exactement aillent au deuxième étage.
c) En moyenne, sur les 60 personnes, combien se rendent au deuxième étage ?
d) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 20 personnes se rendent au deuxième étage.

Exercice II

45 page 442 du livre.

Exercice III

70 page 450 du livre.

Exercice IV

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}9$.
A l'aide de votre calculatrice, calculer, à 10^{-4} près, sans justifier pour les questions *a*) à *d*) :
a) $p(X=27)$
b) $p(X \leq 25)$
c) $p(X \geq 27)$
d) $p(21 \leq X \leq 27)$
e) Déterminer le plus petit entier naturel b tel que : $p(X \leq b) \geq 0{,}95$. Justifier sommairement.

Exercice V

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

— 25 % des connexions transitent via le serveur A ;
— 15 % des connexions transitent via le serveur B ;
— le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

— 90 % des connexions via le serveur A sont stables ;

— 80 % des connexions via le serveur B sont stables ;

— 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

Les parties **A** et **B** sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

Partie A

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les évènements suivants :

— A : « La connexion s'est effectuée via le serveur A » ;

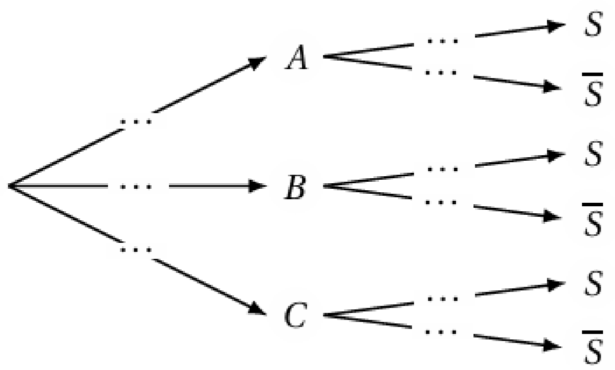
— B : « La connexion s'est effectuée via le serveur B » ;

— C : « La connexion s'est effectuée via le serveur C » ;

— S : « La connexion est stable ».

On note $\overline{S}$ l'évènement contraire de l'évènement S.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.

3. Calculer la probabilité $P\left(C \cap \overline{S}\right)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0{,}855$.

5. On suppose désormais que la connexion est stable.
Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.
On donnera la valeur arrondie au millième.

Partie B

D'après la **partie A**, la probabilité qu'une connexion soit **instable** est égale à 0,145.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.

   a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

   b. Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. *On donnera la valeur arrondie au millième.*

2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de n connexions, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que X_n suit une loi binomiale de paramètres n et 0,145.

   a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.

b. Ecrire un algorithme avec Python qui renvoie en sortie le plus petit entier naturel n tel que la probabilité p_n soit supérieure ou égale à 0,99. Donner la valeur affichée par cet algorithme.

Exercice VI ***La formule établie à la question* 1*a*) *porte le nom de formule de Bayes, et est fondamentale en médecine, SVT….***

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.

1a) Démontrer la relation suivante : $P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$.

1b) Un laboratoire médical veut commercialiser un test de dépistage d'une maladie rare. On note x la proportion d'individus malades au sein de la population totale.

Les résultats d'études statistiques attestent que :

- Si une personne est atteinte par la maladie, le test est positif dans 99 % des cas.
- Si une personne n'est pas atteinte par la maladie, le test est positif dans 0,1 % des cas.

Avant de commercialiser ce test, il est nécessaire de connaître la valeur prédictive positive de ce test, c'est-à-dire la valeur de la probabilité pour que, le test étant positif, la personne dépistée soit réellement atteinte par la maladie.

Nous noterons $f(x)$ la valeur prédictive positive de ce test associée à une proportion x d'individus malades ($0 \leq x \leq 1$).

Démontrer, en utilisant la question 1a), que $f(x) = \dfrac{990x}{989x+1}$

2a) Etudier le sens de variation de f sur $[0\ ;1]$.

2b) On suppose que dans la population, la proportion de personnes malades est de 1 pour 10000.

Quelle est la valeur prédictive positive de ce test ? Que peut-on légitimement penser ?

2c) Quelle devrait être la proportion de personnes malades dans la population pour que la valeur prédictive positive du test soit strictement supérieure ou égale à 0,99 ?