***Nota bene* : Ce travail de synthèse sur les suites et le calcul de limites est à rendre pour le 6 Novembre.**
Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 à 5 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I Déterminer dans chaque cas, la limite de la suite (u_n). Préciser dans chaque cas les propriétés utilisées et détailler les calculs :

a) $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$ *b)* $u_n = \dfrac{(-1)^n+3\sin(n)}{n^2}$ *c)* $u_n = 1{,}2^n - 1{,}21^n$ *d)* $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{(-1)^n}{n}$

Exercice II Faire les mini exercices suivants à l'aide de votre livre numérique :

43 page 185 ; 45 page 185 ; 48 page 185 ; 58 page 186.

94 *page* 191 (*erreur d'énoncé : à la question c) il faut montrer que pour tout entier* $n \geqslant 8$, $1 \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{32}{n}$).

Exercice III

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.
En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1\,700$ et $b_0 = 1\,300$.
Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

— durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
— chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
— chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club *A*.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.
3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0{,}75a_n + 300.$$

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700.$$

b. En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.
6. a. Déterminer la limite de la suite (a_n).
   b. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
7. a. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def  seuil() :
     n = 0
     A = 1 700
     while ... :
         n=n+1
         A = ...
     return
```

   b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

Exercice IV

Faire l'exercice 79 page 219 à l'aide de votre livre numérique.

Exercice V

Voici un QCM avec justification (questions 1) à 3) et 5) à 8) : déterminer, en justifiant, la bonne réponse parmi celles données à chacune des questions suivantes :

On considère L une liste de nombres constituée de termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 3, le dernier nombre de la liste est 2 023 soit :

$$L = [7, 10, \ldots, 2\,023].$$

Question 1 : Le nombre de termes de cette liste est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
2 023	673	672	2 016

Question 2 :

On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.
On peut affirmer que :

a. (a_n) est arithmétique ;
b. (b_n) est géométrique ;
c. (a_n) est géométrique ;
d. (b_n) est arithmétique.

Question 3 : ***les suites de la questions 3) sont utilisées à la question 4).***

$$u_0 = 2,\ v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 3v_n \\ v_{n+1} &= u_n + v_n. \end{cases}$$

. On peut affirmer que :

a. $\begin{cases} u_2 &= 5 \\ v_2 &= 3 \end{cases}$ **b.** $u_2^2 - 3v_2^2 = -2^2$ **c.** $\dfrac{u_2}{v_2} = 1{,}75$ **d.** $5u_1 = 3v_1$.

. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
def valeurs() :
  u = 2
  v = 1
  for k in range(1,11)
    c = u
    u = u + 3*v
    v = c + v
  return (u, v)
```

Question 4 : cette question n'est pas un QCM :

a) Que retourne en sortie ce programme ?

b) Quelles modifications doit-on y apporter afin qu'il affiche en sortie tous les termes des deux suites de rang inférieur ou égal à un entier n choisi par l'utilisateur ?

5.

Soit k un nombre réel non nul.

Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel n.

On suppose que $v_0 = k$ et que pour tout n, on a $v_n \times v_{n+1} < 0$.

On peut affirmer que v_{10} est :

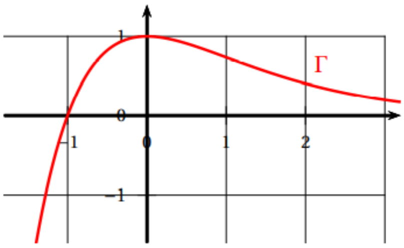
a. positif. **a.** négatif.

c. du signe de k. **d.** du signe de $-k$.

6.

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
On note Γ la courbe représentative de f'.
On a tracé ci-contre la courbe Γ.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 .

On peut affirmer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation :

a. $y = x$ **b.** $y = 0$

c. $y = 1$ **d.** $x = 0$

7.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^{1000} + x$.

On peut affirmer que :

a. la fonction g est concave sur $\mathbb{R}$.

b. la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. la fonction g possède exactement un point d'inflexion.

d. la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

8.

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

On peut alors affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge;

b. la suite (u_n) converge;

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice VI

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
      u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

3. Soit la fonction f définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n.$$

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n+2}.$$

a. Donner v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{1}{n+0{,}5} - 2.$$

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).