Ce travail de synthèse porte sur les suites et le raisonnement par récurrence.

Il est à rendre pour le Mardi 14 Octobre.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupes de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot : pas de copie individuelle.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées. Recopier quelque chose que l'on ne comprend pas n'a aucun intérêt !

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - 2n - 1$.

1a) Calculer u_1 et u_2 .

1b) Compléter le tableau suivant sans justifier :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n								

1c) Quelle conjecture fait-on sur l'expression explicite de u_n en fonction de n ?

2) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que la conjecture précédente est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice II

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ la suite définie par : $u_0 = 150$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,75u_n + 30$.

a) En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 120$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice III

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 8$, et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{6u_n+2}{u_n+5}$.

1) Calculer la valeur exacte de u_1 .

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{6x+2}{x+5}$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- b) En déduire que pour tout réel $x > 2$, $f(x) > 2$.
- c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n , on a :
 $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice IV

Voici deux fonctions écrites en langage *Python* :

```

1 def U(n):
2     u=7
3     for i in range(1,n+1):
4         u=10*u-18
5     return u

```

```

1 def V(n):
2     v=5*10**n+2
3     return v

```

On rappelle qu'en *Python*, $*$ désigne la multiplication, et que $**$ désigne l'élevation à la puissance.

- a) Décrire les suites (u_n) et (v_n) dont ces fonctions *Python* permettent de calculer les termes.
- b) Un élève remarque que les valeurs affichées, pour un même entier naturel n saisi quelconque, sont identiques pour les deux programmes.

Quelle conjecture peut-on émettre ? A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que cette dernière est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice V (exercice facultatif, sauf la question b) qui elle est obligatoire).

u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'un produit de fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(uv)' = u'v + uv'$.

- a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Indication : on observera pour l'étape d'hérédité, que $(u^{n+1})' = (u^n \times u)'$.

- b) **Histoire de réviser utile** : dériver les fonctions suivantes : $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ $h(x) = e^{-x + \sqrt{x^2 + 1}}$.