

Nota bene : ce travail est à rendre pour le 26/28 Mai. Il fait une synthèse sur le calcul intégral et fait revoir quelques autres points pour le baccalauréat.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 à 5 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

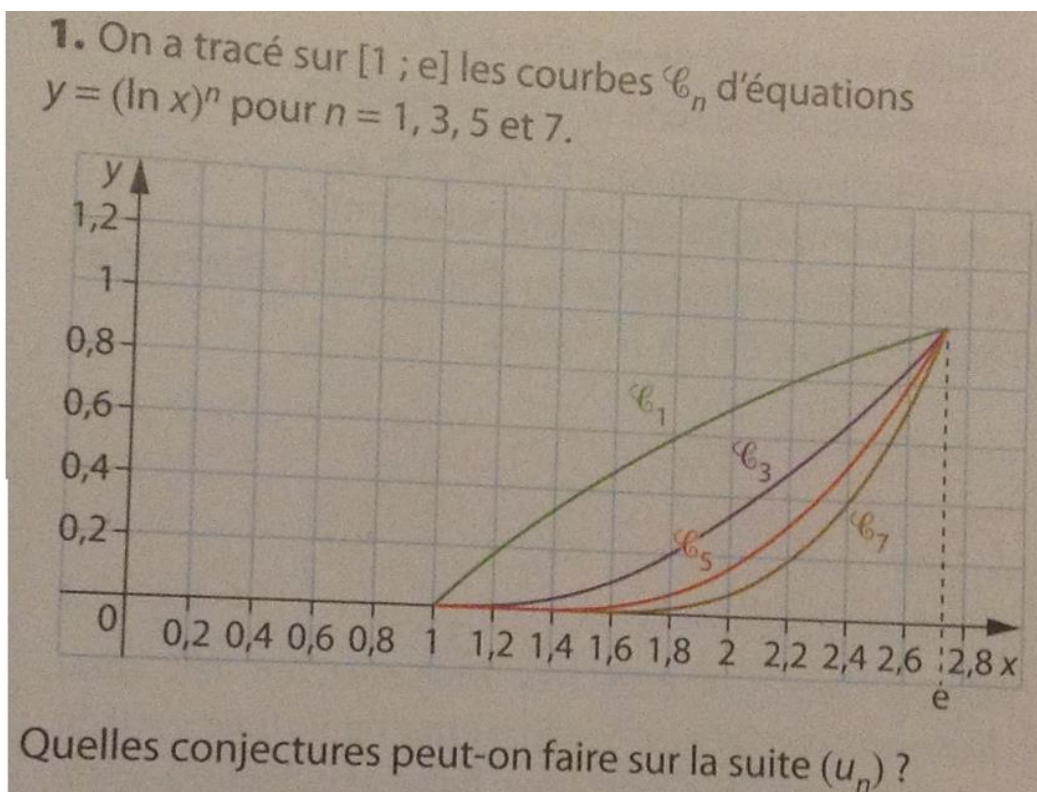
Exercice 0

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 x e^{-2x} dx ; I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx ; J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx ; K = \int_0^{\pi} e^x \sin(x) dx \quad (\text{Faire deux IPP consécutives pour K}).$$

Exercice 1

On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la suite (u_n) par : $u_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$.



2. Montrer que toutes les courbes \mathcal{C}_n ont deux points communs pour n entier naturel non nul.

3. Étudier pour $n \geq 1$, le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Qu'en déduit-on ?

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite est positive ou nulle.

5. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, :

$$u_{n+1} = e - (n+1)u_n.$$

6. En déduire que la limite de (u_n) n'est pas strictement positive, puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

0) Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$, et déterminer en justifiant les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Construire son tableau de variation.

1) Matt est un esthète : il souhaite créer un domaine sous la courbe de cette fonction d'aire égale à celle d'un disque de rayon 1, ce domaine s'appuyant entre les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = \lambda$. Déterminer la valeur du réel $\lambda > 1$ pour qu'il en soit ainsi.

2) Matt est aussi un matheux : il se pose la question de savoir si le domaine noté D_a situé sous la courbe entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$ admet une aire finie lorsque a tend vers $+\infty$. L'aider à résoudre ce problème. Ce résultat est-il contraire à votre intuition et au fait que la courbe de f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$?

3a) Étudier la position relative de la courbe représentative de f et de l'hyperbole d'équation : $y = \frac{1}{x}$.

b) Représenter puis calculer l'aire du domaine \mathcal{D} formé par l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que : $e \leq x \leq e^2$ et $\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{\ln(x)}{x}$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1-x}}.$$

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$ (on rappelle que $e = e^1$).
3. Montrer alors que $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2) + 1 - \ln(1 + e)$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{1-x}}.$$

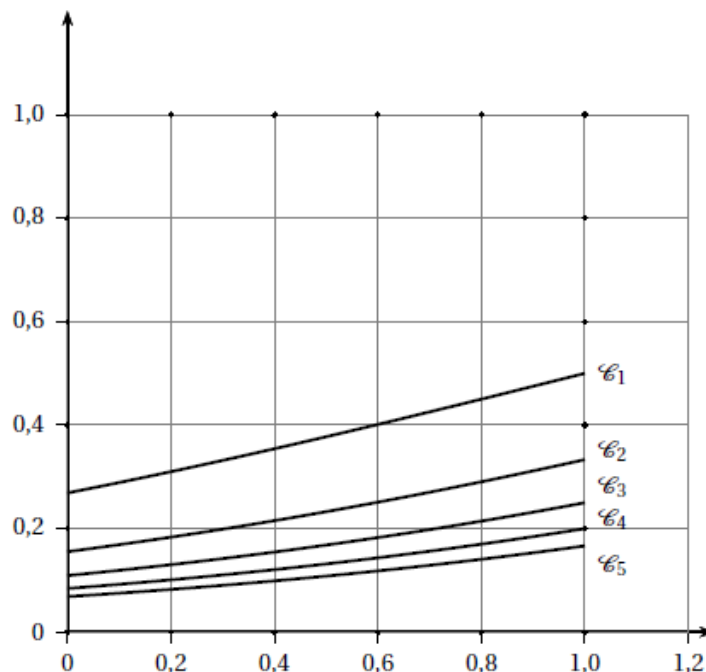
On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe \mathcal{C}_0 représentative de la fonction f_0 .
2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0 .
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?*

Annexe à l'exercice 3



Exercice 4

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) \quad y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h , définies et dérivables sur \mathbb{R} , vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)e^{-x}.$$

- a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

- b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n) , sachant que $h(0) = 0$.
Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

- a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(F) \quad y' + y = 0.$$

- b. Résoudre (F).
c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n) .
d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e \quad (\text{on rappelle que par convention } 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = e^{-x}, \quad f_1(x) = xe^{-x}.$$

- a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.
b. Pour tout entier strictement positif n , on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx. \quad (\text{on ne cherchera pas à calculer } I_n)$$

a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0; 1]$, l'encadrement :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n) .

b. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\frac{1}{k!}e^{-1}$.

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1}}{k!}$$

d. En déduire finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e.$$

Exercice 5 (facultatif)

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Soit $a \in [0; +\infty[$.

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} dt$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a .
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a .
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur \mathbb{R} par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.
5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$. Calculez $J(a)$.

6. a. Démontrez que pour tout $t \in [0; a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.

b. Démontrez que pour tout $a \in [0; +\infty[$, $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.

7. En déduire que pour tout $a \in [0; +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.