Nota bene : ce travail est à rendre pour le 12 Mai. Il fait une synthèse sur les chapitres probabilités et somme de variables aléatoires et l'inégalité de Bienaymé Tchebytchev.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui-même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client ;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.
Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas.
Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans 85 % des cas, il n'y a pas d'erreur.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.
On considère les évènements suivants :

- T : « Le contrôle est un contrôle total » ;
- E : « Une erreur est détectée lors du contrôle ».

On notera $\overline{T}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires de T et E.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P\left(\overline{T} \cap E\right)$.
2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.
3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

Partie B

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0{,}165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*
4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.

   Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Partie C

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.
On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathscr{B}(20\ ;\ 0{,}165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1.
2. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2 + X_3$.

   Justifier que $E(S) = 9{,}9$ et que $V(S) = 8{,}266\,5$.

   Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.

   À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à 0,48.

Exercice II

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près en cas de besoin.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle.
En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.
En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.

Abel est au service.
On considère les évènements suivants :

- S : « Abel réussit son premier service »
- G : « Abel gagne le point ».

1. Décrire l'évènement $\overline{S}$ puis traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(S \cap G)$.
3. Justifier que la probabilité de l'évènement G est égale à 0,695.
4. Abel a gagné le point. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi son premier service ?
5. Les évènements S et G sont-ils indépendants ? Justifier.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.
   - **a.** Quelle est la loi suivie par X et quels sont ses paramètres ? Justifier.
   - **b.** Calculer $P(X \leqslant 18)$.
   - **c.** Quelle est la probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées ?
   - **d.** Déterminer l'espérance de X.
2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,85.
   On considère la variable aléatoire

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n}$$

   - **a.** Déterminer l'espérance et la variance de M_n.
   - **b.** Après avoir rappelé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout entier naturel n, $P(0{,}75 < M_n < 0{,}95) \geqslant 1 - \dfrac{12{,}75}{n}$.
   - **c.** En déduire un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0{,}75\,;\,0{,}95[$ avec une probabilité supérieure à 0,9.

Exercice III

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(70\ ;\ 0{,}4)$.

a) Donner la valeur de l'espérance de X ainsi que la variance de X.
b) Montrer, de deux façons différentes, que : $P(|X-28| \geq 20) \leq 0{,}042$.

Exercice IV

On lance 3600 fois un dé équilibré à six faces. On souhaite minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du chiffre 1 soit compris entre 480 et 720.

1. Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours des 3600 lancers. Déterminer la loi de S.
2. Prouver que $E(S) = 600$ et $V(S) = 500$.
3. Justifier l'équivalence :
$$480 < S < 720 \iff |S - 600| < 120.$$
4. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, prouver que
$$P(480 < S < 720) \geq 0,96.$$

Exercice V

On effectue une suite de lancers d'un dé à quatre faces. On cherche un nombre de lancers tel que, avec un risque d'erreur inférieur à 5 %, la fréquence d'apparition du 4 soit comprise strictement entre $0,24$ et $0,26$.

Pour tout entier naturel non nul i, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le dé tombe sur 4 au lancer numéro } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note M_n la fréquence d'apparition du 4 au cours des n premiers lancers (n entier naturel non nul).

1. Déterminer l'espérance et la variance de chacune des variables aléatoires X_i.
2. Pour n entier naturel non nul, exprimer M_n en fonction de $X_1, \ldots, X_n$.
3. Prouver que le problème posé en préambule revient à chercher un entier naturel non nul n tel que
$$P(|M_n - 0,25| < 0,01) \geq 0,95.$$
4. Déterminer un entier naturel non nul n qui convient en utilisant l'inégalité de concentration.

Exercice VI

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

La consommation d'eau quotidienne en litres d'une ou un français pris au hasard dans la population est donnée par une variable aléatoire C telle que $\mathrm{E}(C) = 150$ et $\mathrm{V}(C) = 900$.

1) Justifier qu'au moins 75 % de la population française consomme entre 90 et 210 litres d'eau par jour.
2) Est-il vrai de dire « la probabilité que l'écart entre C et 150 soit strictement inférieur à 90 litres est supérieure à 0,85 ».

Partie B

On considère une usine fabriquant des montres à aiguilles sans trotteuse. Les deux aiguilles sont fabriquées indépendamment.
Les variables aléatoires donnant la masse de l'aiguille en grammes sont :

- X pour les heures d'espérance 3 et d'écart-type 0,15 ;
- Y pour les minutes d'espérance 2 et d'écart-type 0,1.

1) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z donnant la masse totale des deux aiguilles.
2) Pour que la montre soit bien équilibrée, la masse des deux aiguilles doit être comprise entre 4,4 g et 5,6 g.
   Que peut-on dire de la probabilité que ce soit le cas ?