

Nota bene : ce travail est à rendre pour le 10 Mars. Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 à 6 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et l'inéquation suivantes :

a) $\ln(x+1) \leq 0$

b) $4e^{3x-1} = 1$

c) $e^{2x} + e^x - 12 = 0$

d) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on ait :

$\alpha) 1 - 0,84^n > 0,95$

$\beta) 0,34^n < 10^{-6}$

$\gamma) \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \geq 0,999.$

2) La fonction suivante modélise le nombre de bactéries : $g(t) = 10^6 \times e^{0,25t}$, où t désigne la durée exprimée en heure.

a) Déterminer, le nombre d'individus de la population initiale.

b) Déterminer la durée nécessaire au *doublment* de la population initiale. Même question concernant son *décuplement*.

Exercice II

Pour tout réel a , on considère la fonction notée f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a$.

1) Montrer que pour tout réel a , la fonction f_a admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et préciser sa valeur.

2) Existe-t-il une valeur du réel a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ? Justifier votre démarche.

Exercice III

Faire les exercices (ou question d'exercice) suivants du livre :

42 page 331 – 52 page 332 (par le calcul, pas par lecture graphique !) – 64 question b) uniquement page 332.

Exercice IV

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1.
 - a. Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
 - b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
3.
 - a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

- b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
 - c. Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
(On admettra que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$.)
4.
 - a. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0; +\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2} .
 - b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
5.
 - a. En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.

- b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f .

Exercice V

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 \ln(x+3) - x.$$

1.
 - a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $]0; +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $]0; +\infty[$.
 - b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a

$$f(x) = x \left(5 \frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right).$$

- d. En déduire la limite de f en $+\infty$.
 - e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On notera α cette solution.
- b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14 ; 15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= 5 \ln(u_n + 3) \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n \neq 0$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 5 \ln(x + 3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g .

1. a. Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
- b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)
2. a. Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.
- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq \alpha$.
- d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.
- e. En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

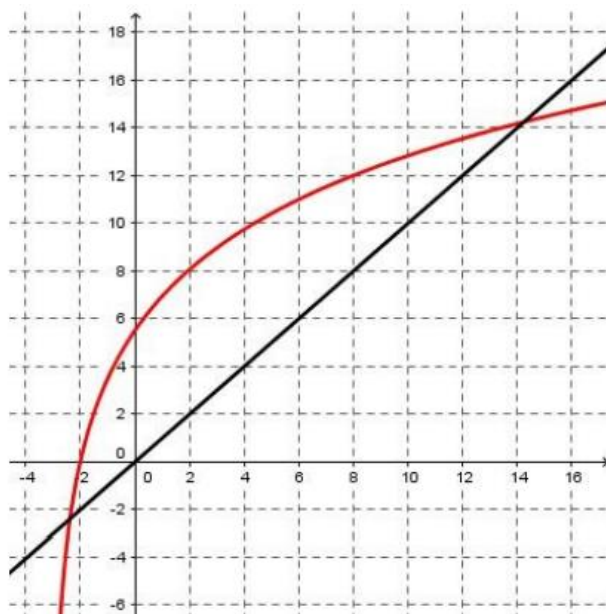
3. On considère l'algorithme suivant :

```
from math import *
def pgm():
    u=4
    while u-14.2<0:
        u=5*log(u+3)
    return u
```

Remarque : sur Python, log désigne la fonction logarithme népérien.

0. Quel est le rôle de cet algorithme ?
- a. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Justifier que cet algorithme se termine.
- b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

Annexe 1



Exercice VI

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

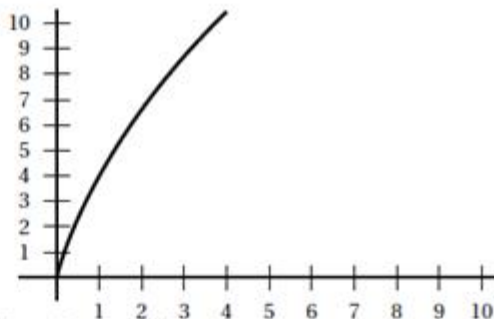
$$g(x) = 4x - x \ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3. La première conjecture de l'élève (g est à valeurs positives) est-elle vraie ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g sur $]0 ; +\infty[$.

1a) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

1b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - \ln(x)$.

2b) Etudier le sens de variation de g sur $]0 ; +\infty[$, puis dresser son tableau de variation complet.

Que pensez-vous de la seconde conjecture de l'élève (g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$) ?

2c) Démontrer que sur $]0 ; 5]$, l'équation : $4x - x \ln(x) = 7$ admet une unique solution notée α que l'on encadrera à 10^{-1} près.

3a) Soit a un réel strictement positif. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g (notée C_g) en son point A d'abscisse a .

3b) Déterminer, en détaillant votre démarche, le nombre de tangentes à C_g qui passent par le point $B(1 ; 5)$. Toute trace de recherche, même incomplète, sera valorisée.

Exercice facultatif (pour se préparer au post bac) :

Pour tout réel $a > 0$, on définit, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la fonction logarithme de base a , notée $\log_a$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\log_2(3x) + \log_4(x^2) = 2$.

b) Calculer : $\log_2 \sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}$

c) Trouver la bonne réponse, en justifiant :

Sachant que $x = \ln \pi$, $y = \log_5 2$ et $z = e^{-\frac{1}{2}}$, alors :

(A) $x < y < z$ (B) $z < x < y$ (C) $z < y < x$ (D) $y < z < x$