

Nota bene : ce travail est à rendre pour le 20 Mai. Il fait revoir quelques autres points pour le baccalauréat. Si certains points (dénombrement) n'ont pas encore été vus, vous rendrez après les exercices portant sur ces points.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1.
 - a. Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.
 - c. Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
 - d. Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.
2.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0 ; +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1 ; 2]$.
 - b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$.
 - c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0 ; 1]$ par :

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0 ; 1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.
2.
 - a. Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0 ; \frac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.
 - b. On admet le tableau de signes suivant :

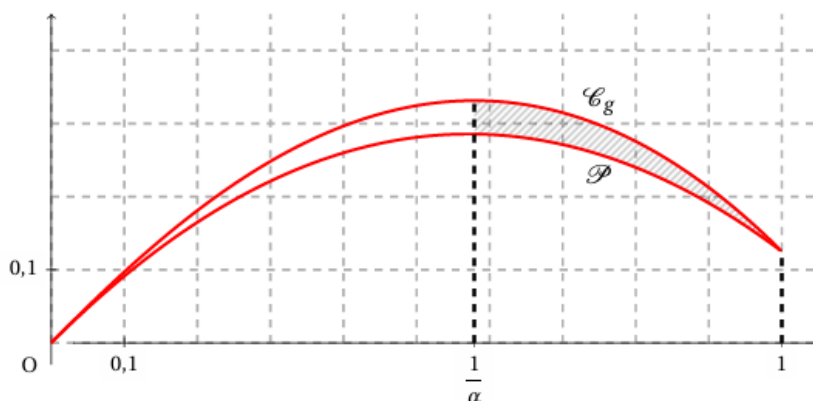
x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$		+	0
		-	

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0 ; 1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g ;
- La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.
On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1.
 - a. Justifier la position relative des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.
 - b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathcal{A}$.

Exercice II

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(70 ; 0,4)$.

- a) Donner la valeur de l'espérance de X ainsi que la variance de X .
- b) Montrer que : $P(|X - 28| \geq 20) \leq 0,042$.

Exercice III

On lance 3600 fois un dé équilibré à six faces. On souhaite minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du chiffre 1 soit compris entre 480 et 720.

1. Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours des 3600 lancers. Déterminer la loi de S .
2. Prouver que $E(S) = 600$ et $V(S) = 500$.
3. Justifier l'équivalence :

$$480 < S < 720 \iff |S - 600| < 120.$$

4. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, prouver que

$$P(480 < S < 720) \geq 0,96.$$

Exercice IV

On effectue une suite de lancers d'un dé à quatre faces. On cherche un nombre de lancers tel que, avec un risque d'erreur inférieur à 5 %, la fréquence d'apparition du 4 soit comprise strictement entre 0,24 et 0,26.

Pour tout entier naturel non nul i , on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le dé tombe sur 4 au lancer numéro } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note M_n la fréquence d'apparition du 4 au cours des n premiers lancers (n entier naturel non nul).

1. Déterminer l'espérance et la variance de chacune des variables aléatoires X_i .
2. Pour n entier naturel non nul, exprimer M_n en fonction de $X_1, \dots, X_n$.
3. Prouver que le problème posé en préambule revient à chercher un entier naturel non nul n tel que

$$P(|M_n - 0,25| < 0,01) \geq 0,95.$$

4. Déterminer un entier naturel non nul n qui convient en utilisant l'inégalité de concentration.

Exercice V

Les deux parties sont indépendantes. En traiter au moins une des deux au choix.

Partie A

La consommation d'eau quotidienne en litres d'une ou un français pris au hasard dans la population est donnée par une variable aléatoire C telle que $E(C) = 150$ et $V(C) = 900$.

- 1) Justifier qu'au moins 75 % de la population française consomme entre 90 et 210 litres d'eau par jour.
- 2) Est-il vrai de dire « la probabilité que l'écart entre C et 150 soit strictement inférieur à 90 litres est supérieure à 0,85 ».

Partie B

On considère une usine fabriquant des montres à aiguilles sans trotteuse. Les deux aiguilles sont fabriquées indépendamment.

Les variables aléatoires donnant la masse de l'aiguille en grammes sont :

- X pour les heures d'espérance 3 et d'écart-type 0,15;
- Y pour les minutes d'espérance 2 et d'écart-type 0,1.

- 1) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z donnant la masse totale des deux aiguilles.
- 2) Pour que la montre soit bien équilibrée, la masse des deux aiguilles doit être comprise entre 4,4 g et 5,6 g.

Que peut-on dire de la probabilité que ce soit le cas ?

Toute la suite porte sur le dénombrement. En fonction de l'avancement du cours, ces exercices pourront être rendus plus tard, je vous communiquerai ultérieurement la date.

Exercice VI (pour travailler le dénombrement)

Exercice numéro 47 page 68 du livre.

47 Le Kinball est un sport dans lequel plusieurs équipes se passent un gros ballon. Le but du jeu est d'obliger une équipe adverse à laisser tomber le ballon au sol. Dans ce sport, tous les joueurs d'une équipe ont le même rôle.



Alice entraîne un club de Kinball qui compte 42 adhérents. Avant un championnat, elle doit choisir 10 personnes qui y participeront.

1. Combien de choix possibles s'offrent à Alice pour cette sélection de 10 joueurs ?
2. Parmi les 42 adhérents, il y a 22 filles et 20 garçons. Combien Alice a-t-elle de choix possibles pour une équipe :
 - a) qui ne comporte que des filles ?
 - b) qui comporte un seul garçon ?
 - c) qui comporte autant de garçons que de filles ?
 - d) qui comporte deux garçons de plus que de filles ?

Exercice numéro 27 page 65 du livre.

27 La séquence d'un brin d'ADN est la succession des nucléotides qui le constituent. Ces nucléotides sont notés A (adénine), C (cytosine), G (guanine) et T (thymine).

- a) Combien y a-t-il de séquences de deux nucléotides différents possibles ?
- b) Lister toutes ces séquences de deux nucléotides.
- c) Donner le nombre de séquences de trois, puis de quatre, nucléotides différents.

Exercice numéro 33 page 66 du livre.

33 Une classe de 12 élèves rassemble 7 filles et 5 garçons. Un professeur range les copies de ces 12 élèves dans un ordre aléatoire.

- a) Combien y a-t-il de façons de ranger ces copies ?
- b) Combien y a-t-il de façons de ranger les copies en commençant par les copies des filles ?
- c) Si on commence par les copies des garçons, cela modifie-t-il le nombre de façons de ranger les copies ?

Exercice numéro 41 page 67 du livre.

41 Dans un lycée, les 36 délégués de classe doivent élire un comité de trois élèves.

1. On suppose que les trois élèves ont le même rôle.

- a) Combien y a-t-il de comités différents possibles ?
- b) On sait de plus que, parmi les délégués, 20 sont des filles et 16 sont des garçons.

Calculer le nombre de comités possibles dans lesquels il y a davantage de filles que de garçons.

2. On suppose que les trois élèves du comité peuvent être président, adjoint, secrétaire.

Reprendre alors les questions a) et b) de 1.

Exercice numéro 70 page 72 du livre.

70 n désigne un nombre entier naturel, $n \geq 1$.

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules de l'urne.

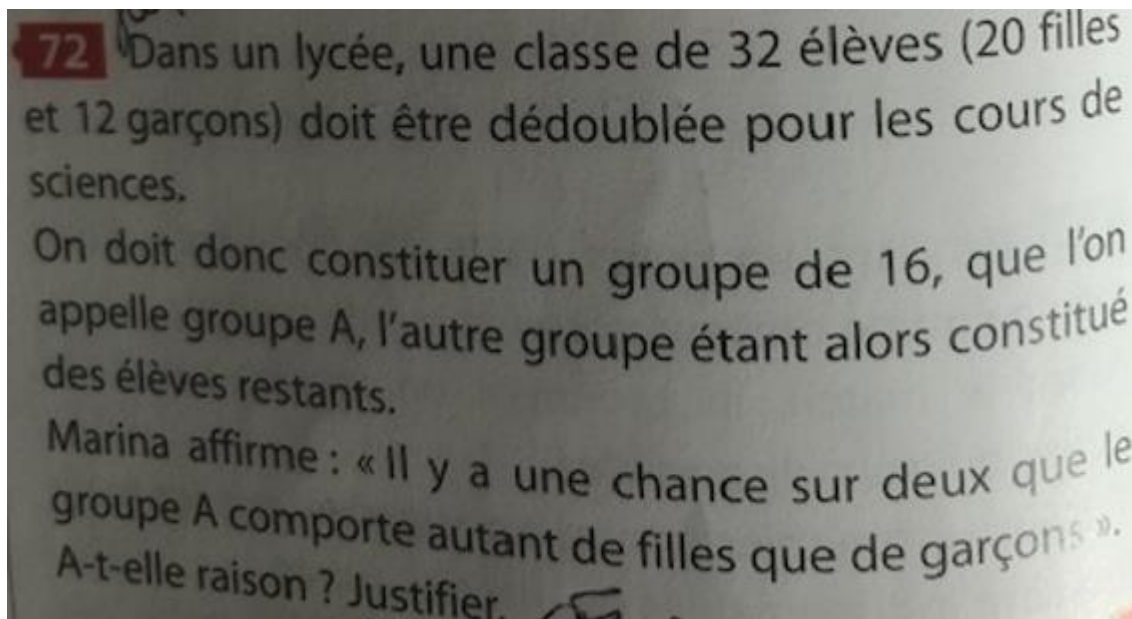
a) Exprimer en fonction de n le nombre de tirages possibles.

b) p désigne un nombre entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.

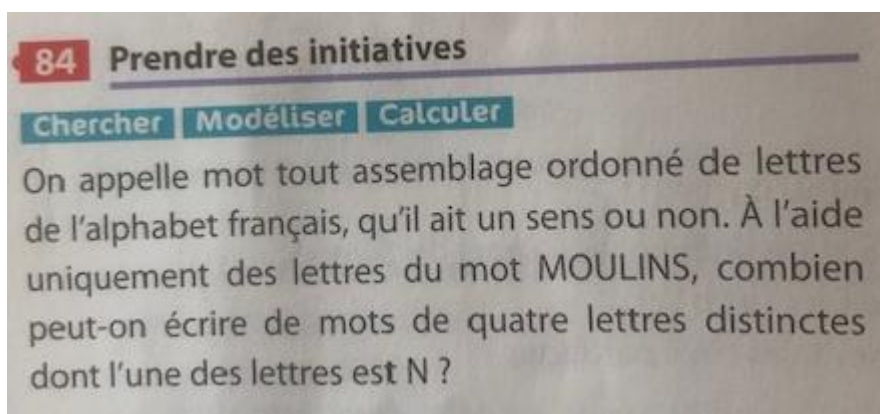
Démontrer que le nombre de tirages avec exactement p boules blanches est $\binom{n}{p}^2$.

c) En déduire la somme : $S = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$.

Exercice numéro 72 page 72 du livre.



Exercice numéro 84 page 43 du livre.



A partir de l'exercice VII, tout est facultatif mis reste intéressant.

Exercice VII (peut fournir des idées pour un thème de développement au grand oral)

Attention : On prend un jeu de poker constitué de 52 cartes usuelles.

Exercice numéro 45 page 67 du livre plus :

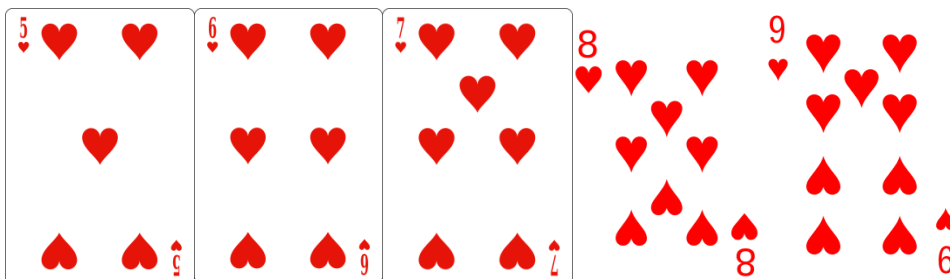
45 Au poker, on utilise un jeu de cinquante-deux cartes : treize valeurs (du 1 au 10 puis valet, dame, roi) en quatre familles (Cœur, Carreau, Pique, Trèfle). Une main est un ensemble de 5 cartes différentes.



1. Combien de mains différentes peut recevoir un joueur ?
2. Une couleur est constituée de 5 cartes de la même famille.
 - a) Combien y a-t-il de mains de ce type en Cœur ?
 - b) Combien y a-t-il de mains de ce type en tout ?
3. Un carré est une main composée de 4 cartes de la même valeur et d'une cinquième carte quelconque.
 - a) En considérant la cinquième carte, déterminer combien de carrés présentent le numéro 10 répété quatre fois ?
 - b) Combien y a-t-il de carrés en tout ?

4) Toujours dans le cadre du poker, on appelle *quinte flush*, 5 cartes consécutives d'une même famille.

Par exemple, la main suivante est une *quinte flush* :



Déterminer le nombre de *quintes flush* que l'on peut former, puis la probabilité d'avoir une *quinte flush* entre les mains.

5) Un *full* est une main de 5 cartes constituée de trois cartes de la même valeur et de deux cartes d'une autre valeur.

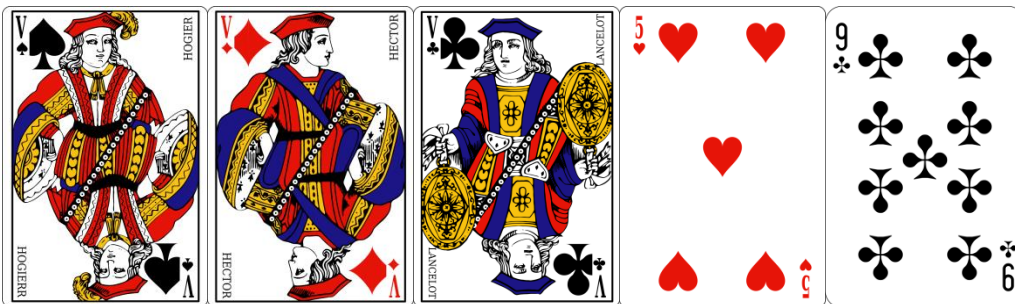
Exemple de full :



Dénombrer le nombre de mains formant un *full*, puis la probabilité d'avoir un *full* entre ses mains.

6) Un *brelan* est une main de cinq cartes, constituée de trois cartes de la même valeur, et de deux autres cartes ne formant ni un carré ni un *full* avec les trois cartes de même valeur.

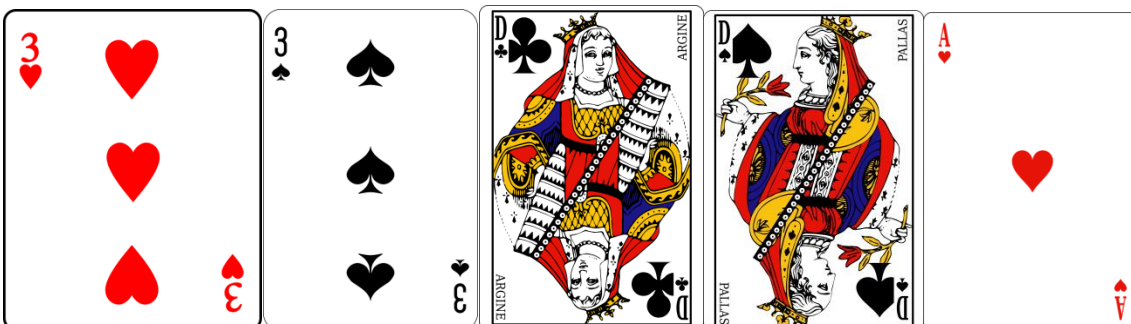
Exemple de brelan :



Dénombrer les mains formant un *brelan*, puis déterminer la probabilité d'avoir un *brelan* entre ses mains.

7) On appelle double paire, deux fois deux cartes de même valeur, ne formant pas avec les autres cartes un *full*.

Exemple de double paire :



Dénombrer les mains contenant une double paire, puis déterminer la probabilité d'avoir une double paire entre ses mains.

Un dernier de type post-bac pour le fun : (les questions sont indépendantes les unes des autres).

a) Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que le produit de p entiers consécutifs est toujours divisible par p !

b) Quel est le cardinal de l'ensemble $\{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_p \leq n\}$

c) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \binom{2n}{n}$. Déterminer en justifiant : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.