

Nota bene : ce travail est à rendre pour le 26 Mars. Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 à 6 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

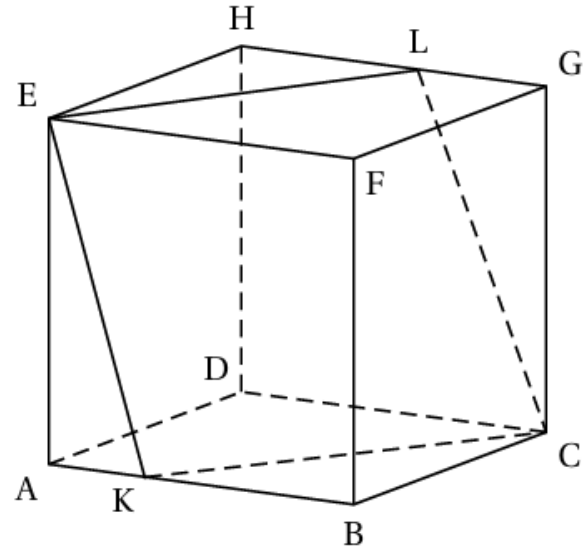
Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m; 0; 0) \quad \text{et} \quad L(1-m; 1; 1).$$



1. Donner les coordonnées des points E et C dans ce repère.
2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point $L(1; 1; 1)$ est confondu avec le point G, le point $K(0; 0; 0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (GEA).

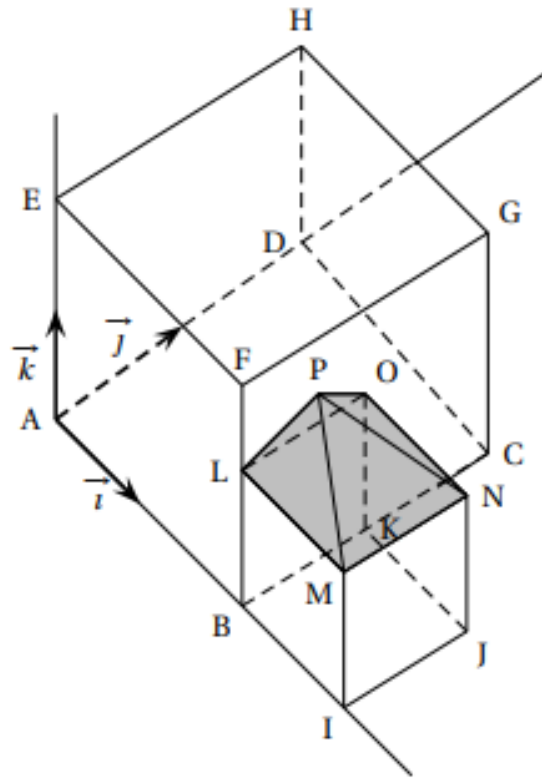
On s'intéresse désormais à la nature de CKEL en fonction du paramètre m .

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0; 1]$.
 - a. Démontrer que CKEL est un parallélogramme.
 - b. Justifier que $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = m(m-1)$.
 - c. Démontrer que CKEL est un rectangle si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$.
4. Dans cette question, $m = \frac{1}{2}$. Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$.
 - a. Démontrer que le parallélogramme CKEL est alors un losange.
 - b. À l'aide de la question 3. b., déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{CKE}$.

Exercice II

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.

Il s'agit d'une maison de forme cubique (ABCDEFGH) accolée à un garage de forme cubique (BIJKLMNO) où L est le milieu du segment [BF] et K est le milieu du segment [BC]. Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale (LMNOP) de base carrée LMNO et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avec $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1.
 - a. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.
 - b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).
2. L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).
Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.
3.
 - a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$.
 - b. Calculer la distance PM.
On admet que la distance PN est égale à $\frac{\sqrt{11}}{3}$.
 - c. Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55° .
Le toit pourra-t-il être construit?
4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes.
Quel est leur point d'intersection?

Exercice III

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points

$$A(1; 0; -1), \quad B(3; -1; 2), \quad C(2; -2; -1) \quad \text{et} \quad D(4; -1; -2).$$

On note Δ la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

1.
 - a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$.
 - b. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
Sur le plan $\mathcal{P}$, que représente le point C par rapport à D?
 - c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x + y - z - 3 = 0$.
2.
 - a. Calculer la distance CD.
 - b. Existe-t-il un point M du plan $\mathcal{P}$ différent de C vérifiant $MD = \sqrt{6}$? Justifier la réponse.
3.
 - a. Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ .
 - b. Montrer que H est le point de Δ associé à la valeur $t = -2$ dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.
 - c. En déduire la distance du point D à la droite Δ .

Exercice IV

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-1; -3; 2), \quad B(3; -2; 6) \quad \text{et} \quad C(1; 2; -4).$$

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$.
2.
 - a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.
 - b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $13x - 16y - 9z - 17 = 0$.

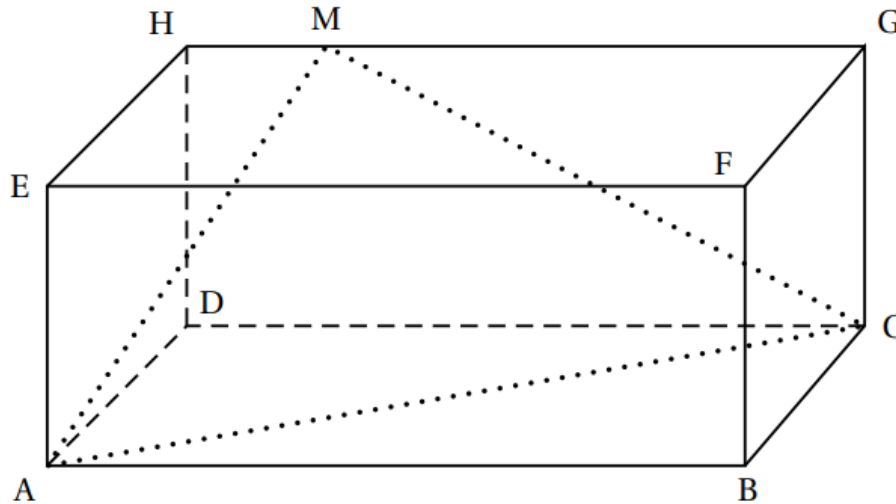
On note $\mathcal{D}$ la droite passant par le point F(15; -16; -8) et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
4. On appelle E le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$.
Démontrer que le point E a pour coordonnées (2; 0; 1).
5. Déterminer la valeur exacte de la distance du point F au plan $\mathcal{P}$.
6. Déterminer les coordonnées du ou des point(s) de la droite $\mathcal{D}$ dont la distance au plan $\mathcal{P}$ est égale à la moitié de la distance du point F au plan $\mathcal{P}$.

Exercice V

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 2$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5; 0; 0)$, $(0; 3; 0)$ et $(0; 0; 2)$.



1.
 - a. Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.
 - b. Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).
2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0; 1]$.
 - a. Justifier que les coordonnées de M sont $(5k; 3; 2)$.
 - b. En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 25k^2 - 25k + 4$.
 - c. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1; 3; 2)$.
On admet que le triangle AMC est rectangle en M.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times h$ où h est la hauteur relative à la base.

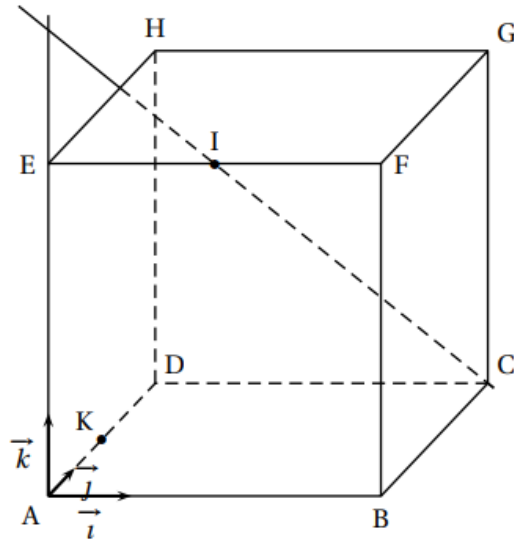
3. On considère le point K de coordonnées $(1; 3; 0)$.
 - a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).
 - b. Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).
 - c. En déduire le volume du tétraèdre MACD.
4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).
Calculer la distance DP; en donner une valeur arrondie à 10^{-1} .

Exercice VI

On considère un repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace dans lequel on place le points

$$B(4; 0; 0), \quad D(0; 4; 0), \quad E(0; 0; 4)$$

et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.

2. On considère le point I milieu de l'arête [EF].

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathcal{P}$ avec (IC).

a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$x + 2y - 2z - 4 = 0.$$

b. Justifier que J a pour coordonnées $\left(\frac{28}{9}; \frac{20}{9}; \frac{16}{9}\right)$.

Que représente J par rapport à C?

c. Vérifier que le point K(0; 2; 0) appartient au plan $\mathcal{P}$.

d. Justifier que (BK) est l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (ABC).

4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{B \times h}{3}$, où B est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.

a. Déterminer le volume de la pyramide CBKG.

b. En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.

c. Justifier que la droite (BG) est incluse dans $\mathcal{P}$.

d. On note I' un point de l'arête [EF], et P' le plan orthogonal à la droite (I' C) passant par G.

Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P'?

Exercice VII (facultatif)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J, K)$.

On considère les points

$$A(-1; -1; 0), B(6; -5; 1), C(1; 2; -2) \text{ et } S(13; 37; 54).$$

1.
 - a. Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
 - b. Prouver que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 - c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2.
 - a. Déterminer la nature du triangle ABC.
 - b. Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unités d'aire, $\frac{\sqrt{1122}}{2}$.
3.
 - a. Prouver que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
 - b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S coupe le plan (ABC) en un point noté H.
Déterminer les coordonnées du point H.
4. Déterminer le volume du tétraèdre SABC.