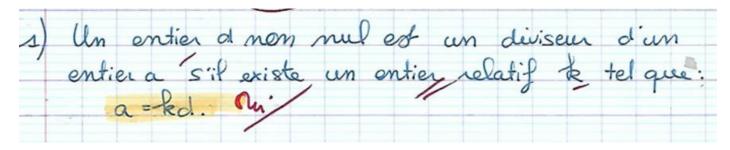
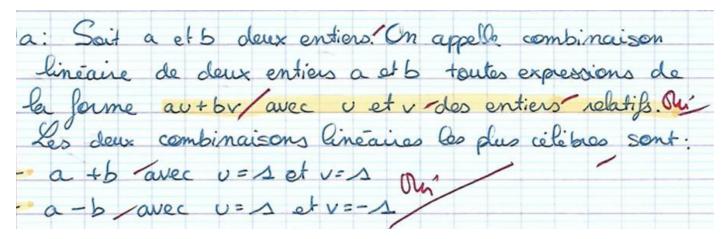
# **Exercice I**



2) Dans la D.E de 41 par 7, le quotient est 5 et le reste 6.

3a)



3b) a divise b, donc il existe un entier k tel que b = ka.

b divise c, donc il existe un entier p tel que c = pb.

Par suite,  $c = (pk) \times a$ , avec pk entier car p et k sont entiers et  $\mathbb{Z}$  est stable par produit, donc a divise c.

## **Exercice II**

- Si n est pair, alors n = 2k avec k entier, et par suite :  $\frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{2k(4k^2+1)}{2} = k(4k^2+1)$  qui est bien entier car somme et produit d'entiers.
- Si n est impair, alors n = 2k+1 avec k entier, et par suite :

$$\frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{(2k+1)((2k+1)^2+1)}{2} = \frac{(2k+1)((4k^2+4k+2))}{2} = (2k+1)(2k^2+2k+1)$$
 qui est bien entier car somme et produit d'entiers.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{Z}.$$

#### **Exercice III**

1) Supposons que 5 soit un diviseur de n-4: alors, n-4=5k avec k entier.

Donc n = 5k +4, et par suite,  $n^2 - 1 = (5k+4)^2 - 1 = (5k+5)(5k+3)$  d'après la troisième identité remarquable, donc  $n^2 - 1 = 5(k+1)(5k+3)$  avec (k+1)(5k+3) entier car somme et produit d'entiers.

Donc  $n^2 - 1$  est bien un multiple de 5.

2) La réciproque est : « Si n² – 1 est un multiple de 5, alors 5 est un diviseur de n – 4 ».

Cette réciproque est fausse : prenons pour contre-exemple : n = 6. Alors  $n^2 - 1 = 35$  est bien un multiple de 5, pour autant, n - 4 = 2, et 5 n'est pas un diviseur de 2!

## **Exercice IV**

La contraposée de cette affirmation est : « Si un entier n est pair, alors n⁵ est pair ».

Supposons n pair: il existe donc un entier k tel que: n = 2k.

Donc  $n^5 = (2k)^5 = 32k^5 = 2 \times 16k^5$ . Vu que  $16k^5$  est entier en tant que produit d'entiers ( $\mathbb{Z}$  est stable par produit), on a donc  $n^5$  qui est pair.

Ainsi, par principe de contraposée, on a bien : (si n<sup>5</sup> est impair, alors n est impair) qui est démontrée.

## **Exercice V**

- a) Le triplet (3; 4; 5) est un triplet Pythagoricien car  $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ :  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .
- b) Tout triplet de la forme : (3k; 4k; 5k) où  $k \in \mathbb{Z}$  est un triplet Pythagoricien car :  $(3k)^2 + (4k)^2 = 9k^2 + 16k^2 = 25k^2 = (5k)^2$ . Vu que  $\mathbb{Z}$  contient une infinité d'éléments, il en résulte qu'il existe une infinité de triplets Pythagoriciens.
- c) Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un triplet Pythagoricien (a ; b ; c) formé par trois entiers impairs : a = 2k + 1 ; b = 2m + 1 et c = 2p + 1 avec k, m et p entiers.

L'égalité:  $a^2 + b^2 = c^2$  s'écrit alors:  $(2k+1)^2 + (2m+1)^2 = (2p+1)^2$ , c'est-à-dire:

 $4k^2+4k+1+4m^2+4m+1=4p^2+4p+1$ , donc  $4k^2+4m^2-4p^2+4k+4m-4p+2=1$ , donc en factorisant par 2 le membre de gauche :  $2(2k^2+2m^2-2p^2+2k+2m-2p+1)=1$  avec :  $2k^2+2m^2-2p^2+2k+2m-2p+1$  noté t qui est entier par stabilité de  $\mathbb Z$  par + et  $\times$ .

Donc 2t = 1 avec t entier: 1 serait donc pair ce qui est absurde.

Par suite, il n'existe aucun triplet Pythagoricien formé de trois entiers impairs.