Maths Expertes **Corrigé du DS1** **Octobre 2025**

Exercice I

1) Un entier d non nul est un diviseur d'un entier a s'il existe un entier relatif k tel que :
a = kd. Oui

2) Dans la D.E de 41 par 7, le quotient est 5 et le reste 6.

3a)

a: Soit a et b deux entiers. On appelle combinaison linéaire de deux entiers a et b toutes expressions de la forme au + bv avec u et v des entiers relatifs. Oui
Les deux combinaisons linéaires les plus célèbres sont :
- a + b avec u = 1 et v = 1
- a − b avec u = 1 et v = −1 Oui

3b) a divise b, donc il existe un entier k tel que b = ka.

b divise c, donc il existe un entier p tel que c = pb.

Par suite, c = (pk)$\times$a, avec pk entier car p et k sont entiers et $\mathbb{Z}$ est stable par produit, donc a divise c.

Exercice II

- Si n est pair, alors n = 2k avec k entier, et par suite : $\frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{2k(4k^2+1)}{2} = k(4k^2+1)$ qui est bien entier car somme et produit d'entiers.

- Si n est impair, alors n = 2k+1 avec k entier, et par suite :

$\frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{(2k+1)((2k+1)^2+1)}{2} = \frac{(2k+1)((4k^2+4k+2)}{2} = (2k+1)(2k^2+2k+1)$ qui est bien entier car somme et produit d'entiers.

$\forall n \in \mathbb{Z}, \dfrac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{Z}.$

Exercice III

1) Supposons que 5 soit un diviseur de n – 4 : alors, n – 4 = 5k avec k entier.

Donc n = 5k +4, et par suite, $n^2 - 1 = (5k+4)^2 - 1 = (5k+5)(5k+3)$ d'après la troisième identité remarquable, donc $n^2 - 1 = 5(k+1)(5k+3)$ avec (k+1)(5k+3) entier car somme et produit d'entiers.

Donc $n^2 - 1$ est bien un multiple de 5.

2) La réciproque est : « Si $n^2 - 1$ est un multiple de 5, alors 5 est un diviseur de $n - 4$ ».

Cette réciproque est fausse : prenons pour contre-exemple : $n = 6$. Alors $n^2 - 1 = 35$ est bien un multiple de 5, pour autant, $n - 4 = 2$, et 5 n'est pas un diviseur de 2 !

Exercice IV

La contraposée de cette affirmation est : « Si un entier n est pair, alors n^5 est pair ».

Supposons n pair : il existe donc un entier k tel que : $n = 2k$.

Donc $n^5 = (2k)^5 = 32k^5 = 2 \times 16k^5$. Vu que $16k^5$ est entier en tant que produit d'entiers ($\mathbb{Z}$ est stable par produit), on a donc n^5 qui est pair.

Ainsi, par principe de contraposée, on a bien : (si n^5 est impair, alors n est impair) qui est démontrée.

Exercice V

a) Le triplet (3 ; 4 ; 5) est un triplet Pythagoricien car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$: $3^2 + 4^2 = 5^2$.
b) Tout triplet de la forme : (3k ; 4k ; 5k) où $k \in \mathbb{Z}$ est un triplet Pythagoricien car : $(3k)^2 + (4k)^2 = 9k^2 + 16k^2 = 25k^2 = (5k)^2$. Vu que $\mathbb{Z}$ contient une infinité d'éléments, il en résulte qu'il existe une infinité de triplets Pythagoriciens.
c) Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un triplet Pythagoricien (a ; b ; c) formé par trois entiers impairs : $a = 2k + 1$; $b = 2m + 1$ et $c = 2p + 1$ avec k, m et p entiers.

L'égalité : $a^2 + b^2 = c^2$ s'écrit alors : $(2k+1)^2 + (2m+1)^2 = (2p+1)^2$, c'est-à-dire :

$4k^2+4k+1 + 4m^2+4m+1 = 4p^2+4p + 1$, donc $4k^2 + 4m^2 - 4p^2 + 4k + 4m - 4p + 2 = 1$, donc en factorisant par 2 le membre de gauche : $2(2k^2+2m^2 - 2p^2 + 2k + 2m - 2p + 1) = 1$ avec :
$2k^2+2m^2 - 2p^2 + 2k + 2m - 2p + 1$ noté t qui est entier par stabilité de $\mathbb{Z}$ par + et $\times$.

Donc $2t = 1$ avec t entier : 1 serait donc pair ce qui est absurde.

Par suite, il n'existe aucun triplet Pythagoricien formé de trois entiers impairs.