Terminale Maths Groupe 2 **Corrigé du DS9** **Janvier 2026**

Exercice I

1a) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

1b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0^+$, donc par limite de quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Vu que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, la droite d'équation : x = 0, à savoir l'axe des ordonnées est asymptote verticale à C_f.

2)

Pour déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$f(1) = \frac{e^1}{1} = e$

On établit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

3. la rédaction de cette question nécessite, dans le cas où m > e, d'utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur chacun des intervalles]0 ;1] et [1 ; +∞[.

Soit m un nombre réel. On cherche, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Cela revient à chercher le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y = m$.

D'après le tableau de variations :

- si $m < e$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution ;
- si $m = e$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique $x = 1$;
- si $m > e$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

Exercice II

Partie A

a) $f(x) = x^2 + e^{-2x}$.

Par limites de référence : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, donc par limite de composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$, et par limite de somme : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$; $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, donc par composée et somme on a :

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

Rappel : $x \mapsto e^{u(x)}$ se dérive en $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

$f'(x) = 2x + (-2)e^{-2x}$

$\boxed{f''(x)} = 2 + (-2) \times (-2) e^{-2x} = 2 + 4e^{-2x} = \boxed{2(1 + 2e^{-2x})}$

c) $2 > 0$; $1 > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$, donc $f''(x) > 0$ par produit et somme de nombres positifs.
Donc par critère de convexité, $\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}$.
Par suite, $\boxed{f' \text{ croît sur } \mathbb{R}}$ (caractérisation de la convexité).

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

e) *) f' est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$
**) f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (q. d).
***) $0 \in]-\infty ; +\infty[$
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation : $f'(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur $\mathbb{R}$: $f'(\alpha) = 0$.

f) Par la méthode des balayages :

Pas égal à 1 :

x	$f'(x)$
0	-2
α	0
1	$1,72$

$0 < \alpha < 1$

Pas égal à 0,1 :

x	$f'(x)$
$0,4$	$-0,01$
α	0
$0,5$	$0,264$

$0,4 < \alpha < 0,5$

Pas égal à 0,01 :

x	$f'(x)$
0,42	−0,023
0,43	0,0137

$\boxed{0,42 < \alpha < 0,43}$ Encadrement à 10^{-2} près de α.

g) Reprenons le tableau de variation de la question d) complété avec α :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\alpha^2+e^{-2\alpha}$	↗	$+\infty$

f' croît sur $]-\infty;\alpha]$ et $f(\alpha)=0$, donc $\forall x\in]-\infty;\alpha]$, $f(x)\leqslant 0$.

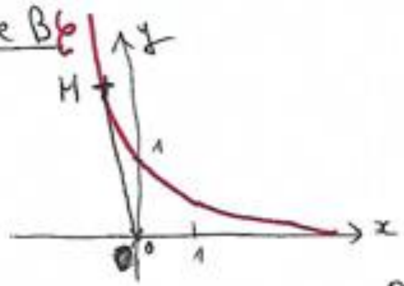
h) f décroît sur $]-\infty;\alpha]$ et croît sur $[\alpha;+\infty[$, donc <u>f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque $x=\alpha$</u>.

Ce minimum est égal à $f(\alpha)=\alpha^2+e^{-2\alpha}$.

Or par définition de α, $f'(\alpha)=0$ c'est à dire $2\alpha-2e^{-2\alpha}=0$, donc $e^{-2\alpha}=\alpha$

et par suite, $\boxed{f(\alpha)}=\alpha^2+\alpha=\boxed{\alpha(\alpha+1)}$

Partie B

1) 

$O(0;0)$
$M(x;h(x))$ car $M\in\mathcal{C}$
$M(x;e^{-x})$.

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\ e^{-x}\end{pmatrix}$

et $OM=\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{x^2+(e^{-x})^2}$

donc $OM=\sqrt{x^2+(e^{-x})^2}$

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x^2+e^{-2x}}=\sqrt{f(x)}$ où $f(x)=x^2+e^{-2x}$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et positive sur $\mathbb{R}$ ($\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2\geq 0$; $e^{-2x}>0$, donc $x^2+e^{-2x}>0$).

donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Ainsi, comme $2\sqrt{f(x)}>0$, $g'(x)$ a le même signe que $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et grâce à q. g) on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$\sqrt{\alpha(\alpha+1)}$	↗	

g a les mêmes sens de variation que f, donc g admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque $x=\alpha$.

$g(\alpha)=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{\alpha(\alpha+1)}$

C'est donc le point $A(\alpha;e^{-\alpha})$ de $\mathcal{C}$ qui est le plus proche de O (q. h) car $OM=g(x)$ et g minimale en α sur $\mathbb{R}$)