Terminale Maths Groupe 2 **Corrigé du DS8** **Décembre 2025**

Exercice I

a) Vrai car :
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$, donc la droite d'équation : $y=5$ est A.S.H à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.
- $\lim_{x\to-2} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation : $x=-2$ est A.S.V à $\mathcal{C}_f$.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc la droite d'équation : $y=1$ est A.S.H à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

b) Faux : f décroît sur $]-\infty;-2[$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=5$, donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5^-$.
Par suite, $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-5) = 0^-$, donc par limite de quotient, $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{f(x)-5} = -\infty$.

c) Pour $x>0$, $g(x) = \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1} = \frac{x^2\times\left(-2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\times\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$.
Par limites de référence : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$; $\lim_{x\to+\infty}(-2)=-2$; $\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$
Donc par sommes : $\lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = -2$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$.
Donc par quotient : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$, donc la droite d'équation : $y=-2$ est A.S.H à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$. (également en $-\infty$, même calcul).

Exercice II L'ordre des questions a été inversé ☹

$f(x) = \frac{3e^x}{e^x+2}$

1) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x\to-\infty} 3e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty}(e^x+2)=2$.
donc par limite de quotient, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$: l'axe des abscisses (équation $y=0$) est donc asymptote horizontale à la courbe représentant f en $-\infty$.

2) Cherchons $\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{e^x+2}$ (F.I a priori).

Or, $\frac{3e^x}{e^x+2} = \frac{3e^x}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)} = \frac{3}{1+\frac{2}{e^x}}$: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$
donc $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{e^x}\right)=1$ et $\lim_{x\to+\infty} 3 = 3$, donc par limite de quotient : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3}$

La droite d'équation $y=3$ est A.S.H à $\mathcal{C}_f$ (courbe de f) en $+\infty$.

3) $f(x) = \dfrac{3e^x}{e^x+2} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où : $\begin{cases} u(x) = 3e^x \\ u'(x) = 3e^x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^x+2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{3e^x(e^x+2) - 3e^x \times e^x}{(e^x+2)^2} = \frac{3e^x \times e^x + 6e^x - 3e^x \times e^x}{(e^x+2)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{6e^x}{(e^x+2)^2}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, $6 > 0$, $(e^x+2)^2 > 0$, donc d'après la règle des signes (produit et quotient) on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$: <u>f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.</u>

D'où :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	3

4) f croît sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, donc <u>$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$</u> : <u>$\mathcal{C}_f$ est entièrement située AU-DESSUS de l'axe des x, son A.S.H en $-\infty$.</u>

Soit $g(x) = f(x) - 3 = \dfrac{3e^x}{e^x+2} - 3 = \dfrac{3e^x - 3(e^x+2)}{e^x+2} = \dfrac{-6}{e^x+2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $e^x + 2 > 2 > 0$ et $-6 < 0$, donc $g(x) < 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 3 < 0$, donc $f(x) < 3$: $\mathcal{C}_f$ est entièrement située EN-DESSOUS de son A.S.H d'équation $y = 3$.

Exercice III

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $2 \geqslant -2\sin(x) \geqslant -2$, donc $5 \geqslant -2\sin(x)+3 \geqslant 1$.

Par suite comme pour tout réel x, $e^{-4x} > 0$, on a : $5e^{-4x} \geqslant (-2\sin(x)+3)e^{-4x} \geqslant e^{-4x}$

Bref : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad e^{-4x} \leqslant f(x) \leqslant 5e^{-4x}$. $(*)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-4x} = 0$, donc on a $(**)$

par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} 5e^{-4x} = 0$. $(***)$

d'après le théorème des gendarmes, $(*)$, $(**)$ et $(***)$ permettent de dire que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

2) $g(x) = (x+2)e^{-x}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc par composée : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty$, on a par limite de produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$

b) $g(x) = (x+2)e^{-x} = \dfrac{x+2}{e^x} = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$,

Ainsi, par limite de somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$

Exercice IV

$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x<1}} e^x = e$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x<1}} (x-1) = 0^-$, donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x<1}} \dfrac{e^x}{x-1} = -\infty}$.

Pour $x \neq 0$: $x^3+2x^2+1 = x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty}$; et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$. donc par produit et somme :

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right) = 1}$, et enfin par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x^2+1) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{31x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{31}\times 31x\, e^{31x}\right)$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(31x) = -\infty$

Or par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$, donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} 31xe^{31x} = 0$

Par suite, par limite de produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{31x} = 0}$.

Première solution : Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et par limite de référence $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc par composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{e^x}{x^2}} = +\infty$.

Seconde solution : $x > 0$, $\sqrt{\frac{e^x}{x^2}} = \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} = \frac{1}{2} \times \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

Par c.c, $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc par composé et produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{e^x}{x^2}} = +\infty$.

Exercice V

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2024x^2) + 2x - 2025$.

a) $\forall X \in \mathbb{R}$, $\cos(X) \geq -1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2024x^2) \geq -1$ et par suite, on a :

$$\underbrace{\cos(2024x^2) + 2x - 2025}_{f(x)} \geq -1 + 2x - 2025$$

$$f(x) \geq 2x - 2026$$

Vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 2026) = +\infty$, par théorème de comparaison de limites :

$$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

b) De même : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2024x^2) \leq 1$, donc $f(x) \leq 2x - 2024$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 2024) = -\infty$, donc par comparaison de limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.}$