Exercice I

a) $f(x) = -x+1+3e^{-x^2} = -x+1+3e^{u(x)}$ où $\begin{cases} u(x) = -x^2 \\ u'(x) = -2x \end{cases}$

$f'(x) = -1+3\times u'(x)e^{u(x)}$

$\boxed{f'(x) = -1-6xe^{-x^2}}$

b) $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2+x+1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $\begin{cases} u(x) = e^{2x} \\ u'(x) = 2e^{2x} \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = x^2+x+1 \\ v'(x) = 2x+1 \end{cases}$

$g'(x) = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$\boxed{g'(x)} = \dfrac{2e^{2x}(x^2+x+1)-e^{2x}(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{e^{2x}(2x^2+2x+2-2x-1)}{(x^2+x+1)^2} = \boxed{\dfrac{(2x^2+1)e^{2x}}{(x^2+x+1)^2}}$

Exercice II

1) $f(x) = (x+1)e^{-2x} = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x+1 \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^{-2x} \\ v'(x) = -2e^{-2x} \end{cases}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = e^{-2x}+(x+1)\times(-2e^{-2x}) = e^{-2x}(1-2(x+1))$

$f'(x) = e^{-2x}(1-2x-2)$

$\boxed{f'(x) = (-2x-1)e^{-2x}}$

2) Etudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$: Pour tout réel x, $e^{-2x} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-2x-1$.

Ainsi, $f'(x) \geq 0$ équivaut à : $-2x-1 \geq 0$, c'est à dire $-2x \geq 1$ et donc à $x \leq \frac{1}{-2}$

On divise par -2 (et $-2<0$) les deux membres de l'inégalité, donc on change son sens.

$f'(x) \geq 0 \iff x \leq -\frac{1}{2}$

Par suite on a :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{e}{2}$	↘	

$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}+1)e^{-2\times(-\frac{1}{2})} = \frac{e}{2}$

3) Autant que de solution de l'équation : $f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Or $f'(x) = 0$ équivaut à $x = -\frac{1}{2}$ (d'après le tableau précédent).

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses (en son point d'abscisse $-\frac{1}{2}$)

4) Notons T_A la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(0\,;f(0))$ avec $f(0) = (0+1)e^{-2\times 0} = 1\times e^0 = 1$.

T_A a pour équation réduite : $y = f'(0)\times(x-0) + f(0)$ avec : $f'(0) = (-2\times 0 - 1)e^{-2\times 0} = -1$

$$\boxed{y = -x+1}$$

5) $f''(x) = 4xe^{-2x}$.

Etudions le signe de $f''(x)$ pour avoir la convexité de f :

Pour tout réel x, $e^{-2x} > 0$, donc $f''(x)$ a le même signe que $4x$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $f''(x) \geq 0 \iff 4x \geq 0 \iff x \geq \frac{0}{4} \iff x \geq 0$.

f est donc convexe sur $[0\,;+\infty[$ et concave sur $]-\infty\,;0]$. $\mathcal{C}_f$ a un seul point d'inflexion

Exercice III

1a) Grâce à $\mathcal{C}_{f'}$ on lit le signe de f' sur $\mathbb{R}$ et on déduit le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

f croît sur $]-\infty\,;-1]$ et f décroît sur $[-1\,;+\infty[$.

b) f' décroît sur $]-\infty\,;0]$, donc f est concave sur $]-\infty\,;0]$.

f' croît sur $[0\,;+\infty[$, donc f est convexe sur $[0\,;+\infty[$.

c) $f'(0) = -1$ car $f'(0)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

Exercice IV

Par lecture graphique, on détermine le signe de f'' sur $[-3{,}5\,;6]$:

x	$-3{,}5$		-3		2		5		6
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		Concave	i_1	Convexe	i_2	Concave	i_3	Convexe	

i_1, i_2, i_3 : Points d'inflexion.

$\mathcal{C}_f$ admet donc trois points d'inflexion d'abscisses respectives : -3 ; 2 et 5 vu qu'en ces abscisses, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Exercice V

$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 1$
$f'(x) = -3x^2 + 4x - 5$
$f''(x) = -6x + 4$.

f concave sur I équivaut à : $\forall x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

$f''(x) \leq 0 \iff -6x + 4 \leq 0 \iff -6x \leq -4 \iff x \geq \frac{-4}{-6}$ (car $-6 < 0$) $\iff x \geq \frac{2}{3}$

Ainsi f est concave sur $[\frac{2}{3} ; +\infty[$: l'affirmation 1 est donc fausse.

Sur $[-1 ; 3]$, $\mathcal{C}_{h'}$ est située AU-DESSUS de l'axe des abscisses, donc $h'(x) \geq 0$ sur cet intervalle : l'affirmation $\boxed{2}$ est VRAIE.

Sur $[-3 ; -1{,}57]$ qui est contenu dans $[-3 ; -1]$, $\mathcal{C}_{h'}$ est sous l'axe des abscisses donc $h'(x) \leq 0$ sur cet intervalle, donc h décroît sur $[-3 ; -1{,}57]$; l'affirmation 3 est FAUSSE.

Notons T la tangente à $\mathcal{C}_h$ en son point d'abscisse -2 :

T a pour équation réduite : $y = h'(-2)(x - (-2)) + h(-2)$.

OR $h'(-2) = -3$ (lu graphiquement) et $A(-2 ; 7) \in \mathcal{C}_h$, donc $h(-2) = 7$.

donc $y = -3(x+2) + 7 = -3x - 6 + 7$: $y = -3x + 1$ est l'équation réduite de T

OR $-3x_B + 1 = -3 \times 0 + 1 = 1 = y_B$, donc $B(0 ; 1) \in T$: l'affirmation $\boxed{4}$ est VRAIE.

Exercice VI

Partie A

1a) $\boxed{f(0) = 2}$

1b) $f'(0)$ = coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $\underbrace{\text{son point d'abscisse } 0}_{N}$.

$f'(0)$ = coefficient directeur de T. OR T passe par P, donc $T = (NP)$.

$\boxed{f'(0)} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$ (Méthode graphique de l'escalier) ou sinon : $f'(0) = \frac{y_P - y_N}{x_P - x_N}$

$f'(0) = \frac{0-2}{2-0} = \frac{-2}{2}$

$f'(0) = -1$.

2) $f(x) = 0$* a pour unique solution réelle : $x = -2$.

$\boxed{S = \{-2\}}$.

* les solutions de cette équation sont les ABSCISSES des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses (x).

3) Non, manifestement, f change de concavité en le point N : elle semble être concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$, donc non convexe sur $\mathbb{R}$.

4) f''(1) >0 : en effet, sur l'intervalle [0 ; +∞[, f est convexe (question précédente), donc par critère de convexité, sa dérivée seconde est positive en tout point dont l'abscisse appartient à [0 ; +∞[, en particulier en l'abscisse 1 : f''(1) >0.

Partie B

$f(x) = (ax+b)e^{\lambda x}$.

1) $f(0) = 2$ (partie A), donc $(a \times 0 + b)e^{\lambda \times 0} = 2$, donc $be^0 = 2$, donc $\boxed{b = 2}$ car $e^0 = 1$.

2) $M(-2;0) \in \mathcal{C}_f$, donc $f(-2) = 0$, donc $(-2a+b)e^{-2\lambda} = 0$ car $f(x) = (ax+b)e^{\lambda x}$

Or $e^{-2\lambda} \neq 0$, donc $\boxed{-2a+b=0}$.

D'après q.1, $b=2$, donc $-2a+2=0$, donc $2a=2$ et $\boxed{a} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$

On a : $a=1$; $b=2$, donc $f(x) = (x+2)e^{\lambda x}$

Reste à trouver la valeur de λ :

D'après la partie $\boxed{A}$ on a : $f'(0) = -1$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)e^{\lambda x}$ dérivée d'un produit de fonctions.

donc $f'(x) = e^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda e^{\lambda x}$

$f'(x) = e^{\lambda x}(1 + \lambda(x+2))$

$f'(x) = e^{\lambda x}(\lambda x + 2\lambda + 1)$

$f'(0) = -1$ équivaut à : $\underbrace{e^{\lambda \times 0}}_{= 1}(\lambda \times 0 + 2\lambda + 1) = -1$

$2\lambda + 1 = -1$

$2\lambda = -1 - 1 = -2$

$\lambda = \frac{-2}{2} = -1$.

L'expression algébrique de f est : $\boxed{f(x) = (x+2)e^{-x}}$.