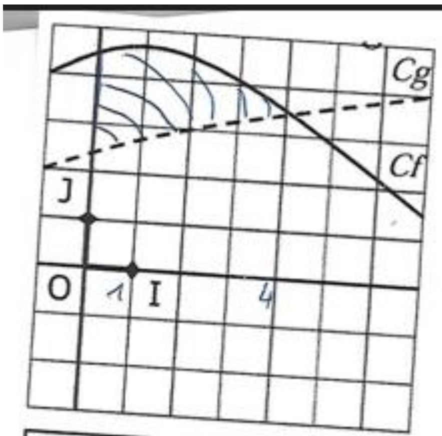
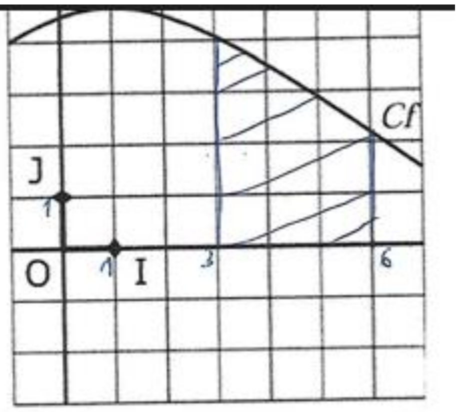
Terminale Maths Groupe 2 **Corrigé du DS18** **26 Mai 2026**

Exercice I



$$A = \int_0^4 f(x) - g(x)\,dx$$



$$A = \int_3^6 f(x)\,dx$$

Exercice II

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t+2)\cos t \, dt$$

Posons : $\begin{cases} u(t) = t+2 \\ u'(t) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v'(t) = \cos(t) \\ v(t) = \sin(t) \end{cases}$

$$I = \left[u(t)v(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t)\,dt.$$

$$I = \left[(t+2)\sin(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,dt.$$

$$I = \left(\frac{\pi}{2}+2\right)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} - 2\sin(0) - \left[-\cos(t)\right]_0^{\pi/2}$$

$$I = \frac{\pi}{2}+2 + \left[\cos(t)\right]_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{I} = \frac{\pi}{2}+2+\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{\cos(0)}_{=1} = \frac{\pi}{2}+\boxed{1}$$

$$J = \int_1^2 \frac{\ln(x) - 1}{x^2}\,dx$$

Soit $\begin{cases} u(x) = \ln(x) - 1 \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} v'(x) = \frac{1}{x^2} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$.

$$J = \left[(\ln(x) - 1) \times \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right) dx.$$

$$J = (\ln(2) - 1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) - (\ln(1) - 1) \times \left(-\frac{1}{1}\right) + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx.$$

$$J = \frac{1 - \ln(2)}{2} - 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$J = \frac{1 - \ln(2) - 2}{2} + \left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right)$$

$$\boxed{J} = \frac{-1 - \ln(2)}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{-\ln(2)}{2}}$$

Exercice III

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1]$.

a. La fonction f est positive sur l'intervalle $[a\,;1]$ donc $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$, par l'axe des abscisses et la courbe.

b. $x \longmapsto x(\ln x)^2$ est de la forme $u'v$ avec $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x}\ln(x) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[a\ ;\ 1]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[a\ ;\ 1]$, donc , d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^1 - \int_a^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{donc } \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} \times (\ln x)^2\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1^2}{2}(\ln 1)^2 - \frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Ce qui est le résultat demandé.

c. $x \longmapsto x\ln x$ est de la forme $u'v$ avec $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln x \end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[a\ ;\ 1]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[a\ ;\ 1]$, donc , d'après la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^1 - \int_a^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\text{donc } \int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1^2}{2}\ln(1) - \frac{a^2}{2}\ln(a) - \int_a^1 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{a^2}{2}\ln(a) - \left[\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]_a^1 \\
&= -\frac{a^2}{2}\ln(a) - \left[\frac{1}{2}\times\frac{1^2}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{a^2}{2}\right] \\
&= -\frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où : } \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \left(-\frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}\right) \\
&= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}
\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat demandé.

d. On cherche la limite de $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ quand a tend vers 0.

$\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} = -\frac{1}{2}(a\ln a)^2 + \frac{a}{2}\times a\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$

Par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{a\to 0} a\ln a = 0$

donc : par produit $\displaystyle\lim_{a\to 0}(a\ln a)^2 = 0$ et $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{a}{2}\times a\ln a = 0.$

De plus, $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}$

donc, par somme, $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$