Terminale Maths Groupe 2 **Corrigé du DS17** **20 Mai 2026**

Exercice I

1/ $I = \int_0^1 \left(4e^{-2x} + 3x^2 + x + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx$

Soit $f(x) = 4e^{-2x} + 3x^2 + x + \frac{2x}{x^2+1}$

Posons $\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ or $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 > 0$

Ainsi une primitive de f est :

$F(x) = \frac{4}{-2} e^{-2x} + 3 \times \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln(x^2+1)$

$F(x) = -2e^{-2x} + x^3 + \frac{x^2}{2} + \ln(x^2+1)$

$I = \left[-2e^{-2x} + x^3 + \frac{x^2}{2} + \ln(x^2+1) \right]_0^1$

$I = -2e^{-2} + 1 + \frac{1}{2} + \ln(2) - (-2 + 0)$

Donc $I = -2e^{-2} + \frac{3}{2} + \ln(2) + 2 = -2e^{-2} + \frac{7}{2} + \ln(2)$.

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) + 2xe^{x^2} + 1)\,dx$

Soit $g(x) = \sin(2x) + 2xe^{x^2} + 1$

Une primitive de g est :

$G(x) = -\frac{\cos(2x)}{2} + e^{x^2} + x$ $\cos\pi$

$J = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) + e^{x^2} + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + e^{\frac{\pi^2}{4}} + \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2} + 1 + 0\right)$

$J = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + e^{\frac{\pi^2}{4}} + \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi^2}{4}} + \frac{\pi}{2}$

2/a) Soit X une variable aléatoire et δ un réel strictement positif

$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$

2/b) Hatt nous dit : $P(|X - E(X)| \geq 3\sigma(X)) \leq \frac{1}{9}$

Appliquons l'inégalité de Bienaymé Tchebychev avec $\delta = 3\sigma(X)$.

Donc $P(|X - E(X)| \geq 3\sigma(X)) \leq \frac{V(X)}{9\sigma(X)^2}$

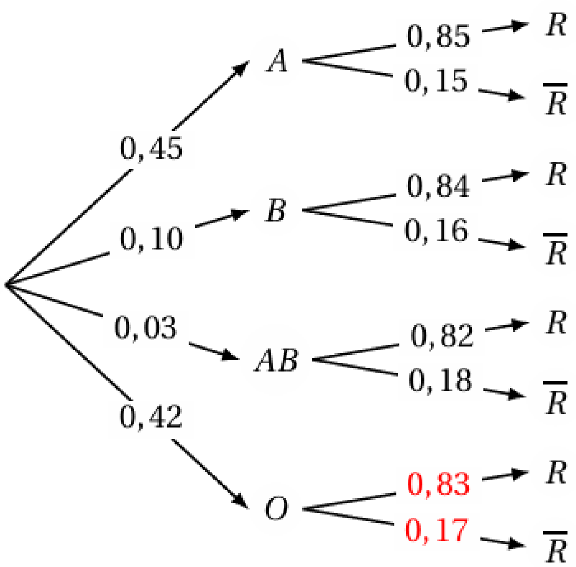
Or $V(X) = \sigma(X)^2$

Donc $P(|X - E(X)| \geq 3\sigma(X)) \leq \frac{1}{9}$ est toujours vraie

Exercice II

Puisque l'on choisit une personne au hasard dans la population française, on est en situation d'équiprobabilité, et donc la loi uniforme permet d'assimiler les proportions à des probabilités.

1. L'arbre représentant la situation est :



Remarque : les deux probabilités en rouge n'étaient pas attendues ici. On peut compléter ces deux branches après avoir répondu à la question **3.**

2. $P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0,10 \times 0,84 = 0,084.$

Dans le contexte de l'exercice, 8,4% de la population est de groupe sanguin B et de rhésus positif.

3. Les évènements A, B, AB et O forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P\left(A \cap R\right) + P\left(B \cap R\right) + P\left(AB \cap R\right) + P\left(O \cap R\right)$$

D'où : $$\begin{aligned} P\left(O \cap R\right) &= P(R) - P\left(A \cap R\right) - P\left(B \cap R\right) - P\left(AB \cap R\right) \\ &= 0,8397 - 0,45 \times 0,85 - 0,084 - 0,03 \times 0,82 \\ &= 0,3486 \end{aligned}$$

Or $P_O(R) = \dfrac{P(O \cap R)}{P(O)} = \dfrac{0,3486}{0,42} = 0,83$

Ce qui est le résultat donné.

4. Trouver la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel revient à calculer la probabilité $P\left(O \cap \overline{R}\right)$.

$$\begin{aligned} P\left(O \cap \overline{R}\right) &= P(O) \times P_O\left(\overline{R}\right) \\ &= P(O) \times (1 - P_O(R)) \\ &= 0,42 \times (1 - 0,83) \\ &= 0,0714 \end{aligned}$$

La probabilité d'être un donneur universel est bien de 0,0714.

5. **a.** On répète 100 fois de manière identique et indépendante une expérience aléatoire à deux issues dont le succès « la personne est un donneur universel » a une probabilité $p = 0,0714$.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès.

Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$.

b. $P(X \leq 7) \approx 0,57714$.

À 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon vaut 0,577.

c. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$ donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= n \times p \\ &= 100 \times 0,0714 \\ &= 7,14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= n \times p \times (1 - p) \\ &= 100 \times 0,0714 \times (1 - 0,714) \\ &= 6,630204 \\ &\approx 6,63 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.} \end{aligned}$$

6. **a.** La variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice représente le nombre moyen de donneurs universels sur les N collectes de sang organisées.

b. M_N est la moyenne empirique de la variable aléatoire X donc :

$E\left(M_N\right) = E(X) = 7,14$.

c. $V\left(M_N\right) = \dfrac{V(X)}{N} = \dfrac{6,63}{N}$.

d. L'évènement $\{7 < M_N < 7,28\}$ revient à $\{|M_N - 7,14| < 0,14\}$

et $P\Big(|M_N - 7,14| < 0,14\Big) = 1 - P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big)$.

On veut que $1 - P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big) \geqslant 0,95$

On veut donc que $P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big) \leqslant 0,05$

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\Big(|M_N - E\big(M_N\big)| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V\big(M_N\big)}{t^2}$

Pour $t = 0,14$ on obtient : $P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big) \leqslant \dfrac{6,63}{N \times 0,14^2}$.

On veut donc que : $\dfrac{16\,575}{49N} \leqslant 0,05 \iff \dfrac{331\,500}{49} \leqslant N$

$\iff 6\,765 + \dfrac{15}{49} \leqslant N$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $N \geqslant 6\,766$.

La plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P\left(7 < M_N < 7,28\right) \geqslant 0,95$ est $6\,766$.