

Exercice I**Partie A :**

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$ où y est une fonction de la variable t définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. La fonction h est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel positif t , $h'(t) = 0$. On a donc $h'(t) + 0,48h(t) = 0 + 0,48 \times \frac{1}{120} = \frac{1}{250}$
Donc la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1) .
2. Les solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$ sont les fonctions de la forme $f(t) = Ce^{-0,48t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont donc les fonctions de la forme $f(t) = Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B :

1. Supposons que p est solution de l'équation différentielle (E_2) ,

$$\text{On a donc } p' = \frac{1}{250} p \times (120 - p)$$

$$\text{Or } p = \frac{1}{y} \text{ et } p' = \frac{-y'}{y^2}$$

$$\frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{250} \frac{1}{y} \times \left(120 - \frac{1}{y}\right) \implies -y' = y^2 \times \frac{1}{250y} \times \frac{120y - 1}{y}$$

$$\text{D'où} \quad \iff -y' = \frac{1}{250} \times (120y - 1)$$

$$\iff -y' = 0,48y - \frac{1}{250}$$

$$\iff y' + 0,48y = \frac{1}{250}$$

Donc y est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

2. y est de la forme $y(t) = Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{on a donc } p(t) &= \frac{1}{y(t)} \\ &= \frac{1}{Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{120}{120Ce^{-0,48t} + 1} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{120}{Ke^{-0,48t} + 1} \text{ avec } K \in \mathbb{R} \text{ en posant } K = 120C \end{aligned}$$

3. On sait que $p(0) = 30$ donc $\frac{120}{Ke^0 + 1} = 30$,

$$\text{donc } \frac{120}{30} = K + 1 \text{ d'où } K = \frac{120}{30} - 1 = 3.$$

4. On sait que : $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} -0,48t = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,48t} = 0$.

Donc, par produit et somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + 3e^{-0,48t} = 1$

et finalement par quotient, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 120$.

Dans le contexte de l'exercice la population de la bactérie se stabilisera vers 120 000.

$$\begin{aligned} 5. \quad p(t) = 60 &\iff \frac{120}{3e^{-0,48t} + 1} = 60 \\ &\iff 120 = 60 \times (3e^{-0,48t} + 1) \\ &\iff 2 = 3e^{-0,48t} + 1 \\ &\iff \frac{1}{3} = e^{-0,48t} \\ &\iff -0,48t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3) \\ &\iff t = \frac{\ln(3)}{0,48} \approx 2,289 \end{aligned}$$

Le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus est de 2,289 heures soit 2 heures et 17 minutes.

Exercice II

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante : $y' = 0,05y - 0,5$ (E_1)

1. On résout l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.

- L'équation différentielle $y' = ay$ a pour solutions les fonctions y vérifiant $y(x) = Ce^{ax}$ où C est un réel quelconque.

Donc l'équation différentielle $y' = 0,05y$ a pour solutions les fonctions y vérifiant $y(x) = Ce^{0,05x}$ où C est un réel quelconque.

- On cherche une solution particulière constante k à l'équation (E_1).

On a donc $0 = 0,05k - 0,5$ donc $k = 10$.

- Les solutions de l'équation (E_1) sont donc les fonctions y définies par $y(x) = Ce^{-0,05x} + 10$ où $C \in \mathbb{R}$.

- On cherche la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 50$.

On a donc $Ce^0 + 10 = 50$ donc $C = 40$.

La solution de l'équation différentielle (E_1) vérifiant $y(0) = 50$ est la fonction y définie par $y(x) = 40e^{0,05x} + 10$.

2. On compare les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100
x	0	5	10	15
$y(x)$	50	61,36	75,95	94,68

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante : $y' = 0,05y(1 - 0,00125y)$ (E_2).

On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$,

et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

1. On a d'une part : $f(0) = \frac{800}{1 + 15e^0} = \frac{800}{16} = 50$

D'autre part :

- $0,05f(x) = \frac{0,05 \times 800}{1 + 15e^{-0,05x}} = \frac{40}{1 + 15e^{-0,05x}}$
- $0,00125f(x) = \frac{0,00125 \times 800}{1 + 15e^{-0,05x}} = \frac{1}{1 + 15e^{-0,05x}}$
- $1 - 0,00125f(x) = 1 - \frac{1}{1 + 15e^{-0,05x}} = \frac{1 + 15e^{-0,05x} - 1}{1 + 15e^{-0,05x}} = \frac{15e^{-0,05x}}{1 + 15e^{-0,05x}}$
- $0,05f(x)(1 - 0,00125f(x)) = \frac{40}{1 + 15e^{-0,05x}} \times \frac{15e^{-0,05x}}{1 + 15e^{-0,05x}} = \frac{40 \times 15e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^2}$
 $= \frac{600e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^2} = f'(x)$ d'après le tableau

On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.

2. Avec ce nouveau modèle f , l'effectif de cette population en 2050 peut être estimé à $f(50)$ soit environ 358.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,05x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,05x} = 0$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 15e^{-0,05x} = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}} = 800$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 800$, ce qui prouve que la courbe \mathcal{C} admet la droite d'équation $y = 800$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. Sur $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{600e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^2}$.

Or pour tout réel X , on sait que $e^X > 0$, donc $e^{-0,05x} > 0$ pour tout x .

$(1 + 15e^{-0,05x})^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

On en conclut que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

5. On résout l'inéquation $15e^{-0,05x} - 1 \geq 0$.

$$15e^{-0,05x} - 1 \geq 0 \iff 15e^{-0,05x} \geq 1 \iff e^{-0,05x} \geq \frac{1}{15} \iff -0,05x \geq \ln\left(\frac{1}{15}\right)$$

$$\iff x \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{15}\right)}{-0,05} \iff x \leq \frac{-\ln(15)}{-0,05} \iff x \leq 20 \ln(15)$$

6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f' .

a. Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$, on détermine le signe de la dérivée seconde $f''(x)$.

D'après le tableau : $f''(x) = \frac{30e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^3} (15e^{-0,05x} - 1)$.

D'après ce qui a été vu précédemment, $f''(x)$ est du signe de $(15e^{-0,05x} - 1)$.

x	0	20 ln(15)	$+\infty$
$15e^{-0,05x} - 1$	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-
	f convexe		f concave

En $x = 20 \ln(15)$, $f''(x)$ s'annule et change de signe, donc la courbe \mathcal{C} admet un point d'inflexion.

Si $x = 20 \ln(15)$, $15e^{-0,05x} - 1 = 0$ donc $15e^{-0,05 \times 20 \ln(15)} = 1$

$$f(20 \ln(15)) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05 \times 20 \ln(15)}} = \frac{800}{1 + 1} = 400$$

Donc le point de coordonnées $(20 \ln(15), 400)$ est le seul point d'inflexion de la courbe \mathcal{C} .

- b.** La direction de la réserve affirme : « Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ».

On établit le tableau de variations de la fonction f' qui modélise la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an.

x	0	20 ln(15)	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f'			

Or $20 \ln(15) \approx 54,2$ donc la direction a raison.

Exercice III

1) $f(x) = x e^{-2x}$ (produit)

Donc $f'(x) = e^{-2x} + x(-2e^{-2x}) = (-2x+1)e^{-2x}$: A1 = Vraie

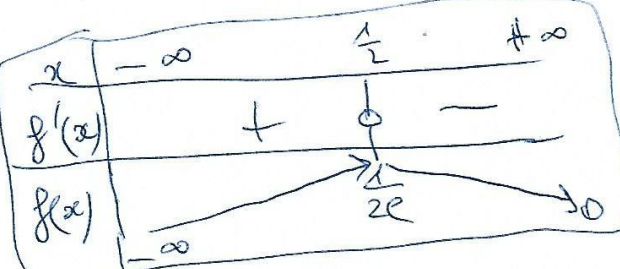
2) $f'(x) + 2f(x) = \overset{(q.1)}{(-2x+1)e^{-2x}} + 2x e^{-2x} = e^{-2x}$; f est bien solution de

$y' + 2y = e^{-2x}$ sur \mathbb{R} : A2 Vraie.

3) D'après q.1 : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-2x+1)e^{-2x}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x} > 0$, donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

Donc :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
 donc (composé) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$
 et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

Donc par produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

$f(x) = x e^{-2x} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{e^{2x}}$. Par c.c $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$

Donc par composé : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2e} (> 0)$.

Si $x > \frac{1}{2}$, alors $0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}$, donc $f(x) = -1$ n'a pas de solution sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

Si $x \leq \frac{1}{2}$, alors f est continue, strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}]$. Or

$-1 \in]-\infty; \frac{1}{2e}]$, donc (C.T.V.I), $f(x) = -1$ a une unique solution sur

$]-\infty; \frac{1}{2}]$ et pas sur tout \mathbb{R} : A3 Vraie

4) $\binom{14}{2} \times \binom{10}{2} = 91 \times 45 \neq 272$: A4 Fausse

Partie B

① $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$: \vec{AC} et \vec{AD} non colinéaires : (ACD) est un plan.

Soit par équation : $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

$$A(2; 0; 0) \in \mathcal{S} \text{ car } 8 \times 2 - 16 = 0.$$

$$C(4; 4; 1) \in \mathcal{S} \text{ car } 8 \times 4 - 5 \times 4 + 4 \times 1 - 16 = 32 - 20 + 4 - 16 = 36 - 36 = 0.$$

$$D(0; 0; 4) \in \mathcal{S} \text{ car } 4 \times 4 - 16 = 0.$$

Donc \mathcal{S} contient les trois points A, C, D non alignés, donc $\mathcal{S} = (\text{ACD})$.

Affirmation 1 : Vraie

② $B(0; 4; 3)$ donc $8x_B - 5y_B + 4z_B - 16 = 8 \times 0 - 5 \times 4 + 4 \times 3 - 16 = -24 \neq 0$.

$B \notin (\text{ACD}) = \underline{\text{A, B, C, D non coplanaires}}$.

Affirmation 2 : Fausse

③ (Ac) a pour (R-P) :

$$\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 4t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$BH \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\text{car}(\text{R-P}) \notin (BH)$

soit $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -3\lambda + 4 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

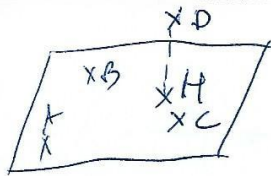
$\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ non colinéaires donc (Ac) et (BH) non parallèles.

$$M(x; y; z) \in (\text{Ac}) \cap (\text{BH}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2t + 2 = -\lambda \\ 4t = -3\lambda + 4 \\ t = -\lambda + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2t - 2 \\ 4t = 6t + 10 \\ t = 2t + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2t - 2 \\ t = -5 \\ t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 8 \\ t = -5 \end{cases} \text{ syst. compatible.}$$

Donc A3 Vraie (Ac) et (BH) se coupent (en $W(-8; -20; -5)$)

④



Vérifier deux points: H est le projeté orthogonal de D sur (ABC) si et seulement si:

- 1) $H \in (ABC)$
- 2) \vec{HD} est normal à (ABC) .

OR (ABC) a pour EC: $x - y + 2z - 2 = 0$

donc $x_H - y_H + 2z_H - 2 = -1 - 1 + 2 \times 2 - 2 = -2 + 4 - 2 = 0$: $H \in (ABC)$

$\vec{m} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à (ABC) et $\vec{HD} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $\vec{m} = \vec{HD}$ et \vec{HD} est

un vecteur normal à (ABC) .

Donc H est le projeté orthogonal de D sur le pla (ABC) : Affirmation 4 vraie