

Exercice d'échauffement

$$\begin{aligned}
 a) \quad 2e^{5x} - 6 < 0 &\Leftrightarrow e^{5x} < \frac{6}{2} \Leftrightarrow e^{5x} < 3 \Leftrightarrow \ln(e^{5x}) < \ln(3) \\
 &\quad \text{par stricte croissance de } \ln \text{ sur }]0; +\infty[\Leftrightarrow 5x < \ln(3) \\
 &\quad \Leftrightarrow x < \frac{\ln(3)}{5}. \\
 \mathcal{I} &=]-\infty; \frac{\ln(3)}{5}[.
 \end{aligned}$$

$$b) \ln(x+1) = \ln(2x+11). \quad (E)$$

$\ln(x+1)$ existe si et seulement si : $x+1 > 0$, c'est à dire $x > -1$.

$\ln(2x+11)$ existe si $2x+11 > 0$, c'est à dire $x > -\frac{11}{2}$.

donc on résout (E) sur $]-1; +\infty[$.

$$\ln(x+1) = \ln(2x+11) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x+1 = 2x+11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x = -10 \end{cases} \quad \text{Or } -10 \not> -1.$$

donc $\mathcal{I} = \emptyset$.

$$c) \ln(\overbrace{e^{-x}+1}^{>0 \text{ pour tout réel } x \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0, \text{ donc } e^{-x}+1 > 1, \text{ donc } e^{-x}+1 > 0 \text{ et on peut en prendre le } \ln!!}) = 4 \Leftrightarrow e^{\ln(e^{-x}+1)} = e^4 \Leftrightarrow e^{-x}+1 = e^4$$

$$\ln(e^{-x}+1) = 4 \Leftrightarrow e^{-x} = e^4 - 1 (> 0) \Leftrightarrow \ln(e^{-x}) = \ln(e^4 - 1)$$

$$\ln(e^{-x}+1) = 4 \Leftrightarrow -x = \ln(e^4 - 1) \Leftrightarrow x = -\ln(e^4 - 1)$$

$$\mathcal{I} = \{-\ln(e^4 - 1)\}.$$

Exercice I

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1.$$

1. On calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^+ \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{par quotient}} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1 \right) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty}$$

Puisque $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

$$\text{Par croissance comparée } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1 \right) = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln(x)}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{\cancel{x}(1 - 2 \ln(x))}{\cancel{x^4}^3} = \boxed{\frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}}$$

3. Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ on a $x^3 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln(x)$.

$$1 - 2\ln(x) \geq 0 \iff -2\ln(x) \geq -1 \iff \ln(x) \leq \frac{1}{2} \iff x \leq e^{\frac{1}{2}} \quad (\text{car } x \mapsto e^x \text{ est croissante})$$

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	-
Variations de f		$\frac{1+2e}{2e}$	

Diagram illustrating the variation of f on the interval $]0 ; +\infty[$. The function increases from $-\infty$ at $x=0$ to a maximum value of $\frac{1+2e}{2e}$ at $x=e^{\frac{1}{2}}$, and then decreases towards 1 as $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
 f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} + 1 \\
 &= \frac{\frac{1}{2}}{e^{2 \times \frac{1}{2}}} + 1 \\
 &= \frac{1}{2e} + 1 \\
 &= \frac{1+2e}{2e} \approx 1,184
 \end{aligned}$$

4. a. Sur l'intervalle $]0 ; e^{\frac{1}{2}}]$ la fonction f est continue et strictement croissante avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+2e}{2e} > 0$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .
- Sur l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty\right[$ la fonction f est continue et strictement décroissante avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.
- Finalement l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$.

b. À la calculatrice, on trouve :

$$0,65 < \alpha < 0,66$$

c. D'après les questions précédentes et puisque la fonction f est croissante sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}]$ et décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$, la fonction f est strictement négative sur $]0 ; \alpha[$, s'annule en α et est strictement positive sur $]\alpha ; +\infty[$.

5. a. Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle OHM est rectangle en H , on peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OH^2 + HM^2 = x^2 + [\ln(x)]^2$$

b. On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = x^2 + [\ln(x)]^2$. Elle est dérivable puisque somme de fonctions dérivables, et sa dérivée est :

$$h'(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2x^2 + 2\ln(x)}{x} = \frac{2x^2 \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right)}{x} = 2x \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 2x \times f(x)$$

Or, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a $2x > 0$, donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.

Donc, d'après la question **4.c.**, $h'(x)$ est négatif sur $]0 ; \alpha]$ et positif sur $[\alpha ; +\infty[$.

Donc h admet un minimum en $x = \alpha$.

La quantité OM^2 admet donc un minimum en α .

c. Pour $x = \alpha$, on a $OM^2 = \alpha^2 + (\ln(\alpha))^2$.

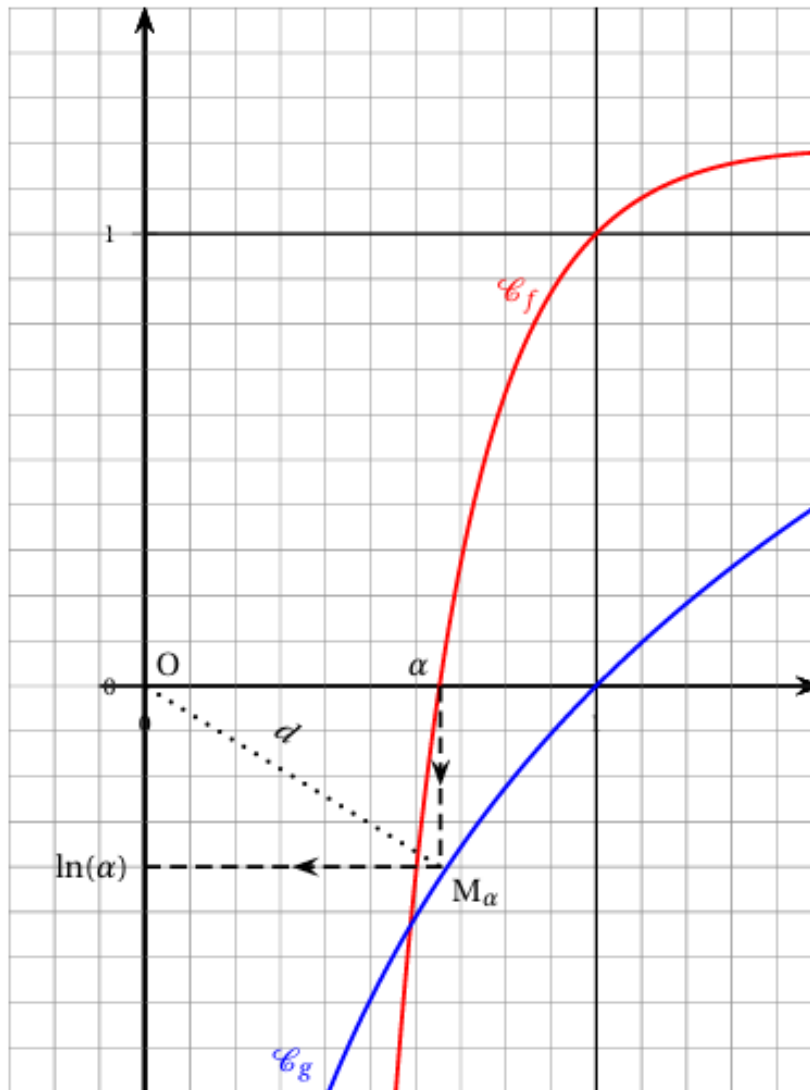
α est la solution de l'équation $f(x) = 0$, donc $f(\alpha) = 0$.

Donc $\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} + 1 = 0 \iff \ln(\alpha) = -\alpha^2 \implies (\ln(\alpha))^2 = \alpha^4$

Le minimum de OM^2 est donc $\alpha^2 + \alpha^4$.

Puisque la quantité OM^2 admet un minimum en α et que d est la valeur minimale de OM :

$$d = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$$



Exercice II

Partie A

1. $-x^2 + 7x + 8 = 0$ admet -1 comme solution évidente. L'autre solution de l'équation du second degré est donc 8.

Le trinôme est négatif (du signe du coefficient de x^2), sauf entre les racines, d'où le tableau de signes de $x \mapsto -x^2 + 7x + 8$:

x	$-\infty$	-1	8	$+\infty$
signe de $-x^2 + 7x + 8$		$-$	$+$	$-$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 + 7x + 8 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ est l'intervalle $[-1 ; 8]$

2. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; 8]$, $-x^2 + 7x + 8 \geq 0$. D'où en ajoutant 1 à chaque membre $-x^2 + 7x + 9 \geq 1$.

Comme la fonction logarithme népérien est une fonction croissante on a pour tout x appartenant à $]0 ; 8]$, $\ln(-x^2 + 7x + 9) \geq \ln(1)$. C'est à dire $\ln(-x^2 + 7x + 9) \geq 0$.

Pour tout x appartenant à $]0 ; 8]$, $x > 0$ et $10 \ln(-x^2 + 7x + 9) \geq 0$, donc $f(x) = \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x} \geq 0$.

3. Sur l'intervalle $[0 ; 8]$ la courbe représentative est au dessus de l'axe des abscisses.

Partie B

1. Pour $x \in]0 ; 8]$, $M\left(x, \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}\right)$ et donc $N(x, 0)$ et $P\left(0, \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}\right)$.

2. Comme pour $x \in]0 ; 8]$, l'abscisse de N est positive et l'ordonnée de P est positive.

On peut écrire $ON = x$ et $OP = \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}$.

L'aire de $ONMP$ vaut $ON \times OP$ donc :

$$\forall x \in]0 ; 8] \quad \mathcal{A}(x) = x \times \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x} = 10 \ln(-x^2 + 7x + 9)$$

3. Sur $]0 ; 8[$, $-x^2 + 7x + 9 > 0$ donc $\mathcal{A}$ est une fonction dérivable de la variable x sur $]0 ; 8[$ comme composée de fonction définies et dérivables.

$$\forall x \in]0 ; 8[, \mathcal{A}'(x) = 10 \times \frac{-2x + 7}{-x^2 + 7x + 9}.$$

S'il existe $x \in]0 ; 8[$ telle que $\mathcal{A}(x)$ soit maximale, il faut que $\mathcal{A}'(x) = 0$

Pour $x \in]0 ; 8[$, $-x^2 + 7x + 9 > 0$, $\mathcal{A}'(x)$ est donc du signe de $-2x + 7$.

$$\mathcal{A}'(x) \geq 0 \iff -2x + 7 \geq 0$$

$$\mathcal{A}'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{7}{2}$$

$\mathcal{A}$ est croissante sur $\left]0; \frac{7}{2}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{7}{2}; 8\right[$.

La dérivée s'annule en $\frac{7}{2}$, en étant positive avant puis négative après, donc la fonction $\mathcal{A}$ a un maximum sur $]0; 8[$:

$$\mathcal{A}\left(\frac{7}{2}\right) = 10\ln(17) + 10\ln(5) - 20\ln(2) \approx 30,56$$

Partie C

A taper !

Exercice III

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 &= \ln(4) \\ v_{n+1} &= \ln(-1 + 2e^{v_n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad w_n = (-1 + e^{v_n}).$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie et strictement positive.

1.
 - $v_1 = \ln(-1 + 2e^{v_0}) = \ln(-1 + 2e^{\ln 4}) = \ln(-1 + 2 \times 4) = \ln(-1 + 8) = \ln 7$ (valeur approchée ligne 4 colonne 3)
 - $w_0 = -1 + e^{v_0} = -1 + e^{\ln 4} = -1 + 4 = 3$ (valeur ligne 3 colonne 4)
2.
 - a. Il faut saisir la formule 2.
 - b. On peut penser que la suite (v_n) est croissante
 - c. Démonstration par récurrence :

Initialisation : on a $v_0 = \ln 4$ et $v_1 = \ln 7$: la croissance de la fonction $\ln$ assure que $v_0 < v_1$.

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n < v_{n+1}$, alors :

$e^{v_n} < e^{v_{n+1}}$ par croissance de la fonction exponentielle

$2e^{v_n} < 2e^{v_{n+1}}$ la multiplication par $+2$ respecte l'ordre

$-1 + 2e^{v_n} < -1 + 2e^{v_{n+1}}$ l'addition respecte l'ordre

$\ln(-1 + 2e^{v_n}) < \ln(-1 + 2e^{v_{n+1}})$ par croissance de la fonction logarithme népérien (on a supposé que la suite (v_n) est bien définie donc que tous les nombres de la forme $-1 + 2e^{v_n}$ sont supérieurs à zéro) ; soit finalement

$v_{n+1} < v_{n+2}$: l'inégalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang suivant : d'après le principe de récurrence :

$$\text{quel que soit } n \in \mathbb{N}, \quad v_n < v_{n+1}$$

La suite (v_n) est croissante.

3. a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -1 + e^{v_n}$, donc

$$w_{n+1} = -1 + e^{v_{n+1}} = -1 + e^{\ln(-1+2e^{v_n})} = -1 - 1 + 2e^{v_n} = -2 + 2e^{v_n} = 2(-1 + e^{v_n}) :$$

finalement

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n$: cette égalité montre que la suite w_n est géométrique de raison 2 avec pour premier terme $w_0 = 3$.

- b. On sait qu'alors le terme général w_n est égal à :

$$w_n = 3 \times 2^n$$

Or par définition $w_n = -1 + e^{v_n} = 3 \times 2^n \iff e^{v_n} = 1 + 3 \times 2^n$.

Par croissance de la fonction logarithme népérien : $v_n = \ln(1 + 3 \times 2^n)$ pour tout entier naturel.