

## Exercice 0

$$a) \boxed{I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), H(0; 1; 1)}$$

$J$  est le milieu de  $[LG]$  avec :  $L(1; 1; 0)$  et  $G(1; 1; 1)$ , donc :

$$J\left(\frac{x_L+x_G}{2}; \frac{y_L+y_G}{2}; \frac{z_L+z_G}{2}\right) = J\left(\frac{1+1}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right) = J\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$$

## Exercice 1

$$C(1; 1; 0); F(0; 1; 1)$$

$$H(1; 0; 1) \quad G(1; 1; 1), \text{ donc } K \text{ est le milieu de } [HG], K\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+1}{2}\right)$$

$$K\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$$

$$\vec{CF} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{CK} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \frac{y_{CF}}{y_{CK}} = \frac{0}{-\frac{1}{2}} = 0 \text{ et } \frac{z_{CF}}{z_{CK}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Or  $0 \neq 1$ , donc  $\vec{CF}$  et  $\vec{CK}$  n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles.  
 $\vec{CF}$  et  $\vec{CK}$  ne sont pas colinéaires, donc les points  $C, F, K$  ne sont pas alignés et définissent donc un unique plan : le plan  $(CFK)$ .

1a) (d) passe par  $A(0; 1; 4)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  dirige (d), donc une R-P de (d) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

1b)  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  dirige (d) et par lecture de la R-P donnée de (d'),  $\vec{u}' \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$  dirige (d').

$$\text{Or } \frac{x_{u'}}{x_u} = \frac{5}{1} = 5 \text{ et } \frac{y_{u'}}{y_u} = \frac{2}{-1} = -2. \text{ Or } 5 \neq -2, \text{ donc } \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ ne sont pas}$$

colinéaires, et par suite, (d) et (d') ne sont pas parallèles.

1-c) (d) et (d') ne sont pas parallèles donc sont sécantes ou non coplanaires.

Étudions l'intersection de (d) et (d').

Soit  $M(x; y; z)$

$$M \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow \exists (t; t') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = t = -1 + 5t' \\ y = -1 - t = 2 + 7t' \\ z = 4 + t = 3 - 9t' \end{cases}$$

$$\text{Donc: } \begin{cases} t = 5t' - 1 \\ 2t' = -1 - (5t' - 1) \\ -9t' = -1 + 5t' - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5t' - 1 \\ 2t' = -5t' \\ -9t' = 5t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Système compatible oui!

$$\text{Donc: } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ainsi les droites (d) et (d') sont sécantes et se coupent au point  $M(-1; 2; 3)$ .

2) Par lecture de la R-L donnée,  $\vec{w} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$  dirige (A), et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  dirige (d).

Or  $\vec{w} = -4\vec{u}$ , donc  $\vec{w}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires, donc (d) et (A) sont parallèles.

$A(0; 1; 4) \in (d)$ . Montrons que  $A \notin (A)$ :

$$A(0; 1; 4) \in (A) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : \begin{cases} 0 = 9 - 4\lambda \\ 1 = 2 + 4\lambda \\ 4 = 13 - 4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{9}{4} \\ \lambda = -\frac{1}{4} \\ \lambda = \frac{9}{4} \end{cases} \text{ : absurde car } \frac{9}{4} \neq -\frac{1}{4}.$$

Donc  $A \notin (A)$ , par suite (d) et (A) sont strictement parallèles.

## Exercice II

On cherche s'il existe un réel  $t$  tel que:  $\begin{cases} x_N = 1 + 2t \\ y_N = -2 + t \\ z_N = 4 - t \end{cases}$  c'est à dire:  $\begin{cases} 2 = 1 + 2t & (L_1) \\ 1 = -2 + t & (L_2) \\ -1 = 4 - t & (L_3) \end{cases}$

(L2) conduire à:  $t = 3$  et (L3) à:  $t = 5$ : Or  $3 \neq 5$ , donc le système est incompatible (pas de solution) et par suite  $N(2; 1; -1)$  n'appartient pas à la droite  $\Delta$ .

En donnant à  $t$  la valeur 0, le point  $P(1; -2; 4)$  appartient à cette droite, et de même en faisant  $t = 1$ , le point  $Q(3; -1; 3)$  également.

### Exercice III

1)  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  :  $\frac{x_{\vec{AB}}}{x_{\vec{AC}}} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$  et  $\frac{y_{\vec{AB}}}{y_{\vec{AC}}} = \frac{0}{4} = 0$ .  $-\frac{1}{3} \neq 0$ , donc  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

2a) d'après q.1), A, B, C non alignés forment le plan (ABC).

Pour prouver que A, B, C et D sont coplanaires, montrons l'existence de réels a et b tels que :

$$\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC} \quad (*)$$

OR  $\vec{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$  : Trivialement (car  $y_{\vec{AB}} = 0$ ) on a :  $\boxed{\vec{AD} = 4\vec{AB} + \vec{AC}}$  :  $\vec{AD}$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  (non colinéaires), donc  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  et  $\vec{AD}$  sont coplanaires et par suite A, B, C, D sont coplanaires.

Remarque : Pour qui est fatigué avec le calcul mental, (\*) conduit au système :  $\begin{cases} a-3b=1 \\ 4b=4 \\ -a+b=-3 \end{cases}$  qui se résout alors facilement :  $\begin{cases} b=1 \\ a-3=1 \\ -a+1=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} b=1 \\ a=4 \\ a=4 \end{cases}$  système compatible.

2b)  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ , donc  $\vec{CD} = 4\vec{AB}$  : ainsi (AB) et (CD) sont parallèles car  $\vec{CD}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires et par suite, ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD].

### Exercice IV

Regardons si  $C(5; 0; -3)$  appartient (ou pas) à chacune des droites  $\mathcal{D}$  et (AB).

$$C(5; 0; -3) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 5 = -t+3 \\ 0 = t+2 \\ -3 = 2t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -\frac{3-1}{2} = -1 \end{cases} \quad \text{: système incompatible}$$

donc  $C \notin \mathcal{D}$  (C n'est pas le point de paramètre  $t = -2$  de la droite  $\mathcal{D}$ ).

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  dirige (AB) qui passe aussi par  $A(2; 1; -1)$ , donc une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{ou } \lambda \in \mathbb{R}.$$

d'où le (calcul mental) C est le point de paramètre  $\lambda = -1$  de (AB) : Ainsi  $C \in (AB)$ .

Ainsi,  $\mathcal{D}$  et (AB) ont le point C en commun : elles sont sécantes en C ou bien confondues.

OR  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  dirige  $\mathcal{D}$ , et clairement,  $\vec{u}$  et  $\vec{AB}$  non colinéaires - donc  $\mathcal{D}$  et (AB) non parallèles et se coupent en C : Affirmation VRAIE.

## Exercice V

1) Le plus simple est ici est de prouver que les coordonnées de A et celles de B vérifient la représentation paramétrique donnée (qui est celle d'une droite):

#Calcul mental:  $A(1;0;-3)$  est le point de paramètre  $t=2$  de la droite donnée.

$B(-2;-1;0)$  est le point de paramètre  $t=1$  de la droite donnée.

OR A et B sont distincts et appartiennent à cette droite. Ainsi la R-P donnée est bien une R-P de la droite (AB).

Méthode Bis:  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  dirige (A), où (A) est la droite dont une R-P est donnée.

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Or  $\vec{u} = \vec{AB}$ : (AB) et (A) sont parallèles.

de plus,  $A(1;0;-3) \in (AB)$  et  $A(1;0;-3) \in (A)$ : Point de paramètre  $t=2$ .

Ainsi (AB) et (A) sont parallèles et ont le point A en commun. Or (AB) et (A) sont confondues: La R-P donnée est bien une R-P de la droite (AB).

2) De part la R-P donnée, (d') est dirigée par  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$\vec{v}$  et  $\vec{AB}$  non colinéaires, car ayant même abscisse, s'ils étaient colinéaires, ils auraient même ordonnée et ici  $1 \neq -2$ .

Or (AB) et (d') ne sont pas parallèles.

Étudions l'intersection de (AB) et (d'):

$$M(x; y; z) \in (AB) \cap (d') \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R} \text{ tels que: } \begin{cases} x = 3t - 5 = -2 + 3k \\ y = t - 2 = -1 - 2k \\ z = -3t + 3 = 1 + k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3t - 5 = -2 + 3k \\ t = 1 - 2k \\ -3(1 - 2k) + 3 = 1 + k \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1 - 2k \\ 3(1 - 2k) - 5 = -2 + 3k \\ -3 + 6k + 3 = 1 + k \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1 - 2k \\ 3 - 6k - 5 = -2 + 3k \\ 6k = k + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 - 2k \\ k = 0 \\ k = \frac{1}{5} \end{cases} \text{ système incompatible. Or } (AB) \cap (d') = \emptyset. \text{ Comme (AB) et (d') ne} \\ \text{sont pas parallèles et d'intersection vide, il en résulte que}$$

(AB) et (d) ne sont pas coplanaires.

## Exercice VI

Prouver que ABCD est un tétraèdre revient à prouver que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Supposons  $A, B, C, D$  coplanaires (raisonnement par l'absurde).

Alors comme  $A, C, D$  non alignés, ils forment le plan  $(ACD)$ .

Par suite,  $B \in (ACD)$ , donc il existerait des réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\vec{AB} = a\vec{AC} + b\vec{AD}$ .  
(\*)

Or  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ . L'égalité vectorielle (\*) se traduit sur les

coordonnées par :

$$\begin{cases} -2 = 2a - 2b \\ 4 = 4a \\ 3 = a + 4b \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} a = 1 \\ -2 = 2 - 2b \\ 3 = 1 + 4b \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ b = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{donc } 1 = \frac{1}{2} \\ \text{: AB n'est pas} \end{array} \right.$$

Ainsi  $A, B, C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires.

Donc ABCD est un tétraèdre.

### Exercice VII

L'affirmation 1 est vraie :

$$\begin{aligned} \vec{JH} &= \vec{JF} + \vec{FE} + \vec{EH} \\ &= \frac{1}{2}\vec{BF} + \vec{BA} + \vec{BC} \\ &= \frac{1}{2}\vec{DH} + 2\vec{BI} - \vec{CB} \\ &= \vec{DM} + 2\vec{BI} + -\vec{CB} \end{aligned}$$

L'affirmation 2 est fausse : en effet,  $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AH}$  : cette relation est évidente avec Chasles again, ou en introduisant un repère de l'espace. Le vecteur  $\vec{AG}$  est combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  qui sont non colinéaires, donc on a 3 vecteurs coplanaires, donc ces 3 vecteurs ne forment pas une base de l'espace (= triplet de vecteurs non coplanaires).