

Exercice 0

a) $\boxed{I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), H(0; 1; 1)}$

J est le milieu de $[CH]$ avec : $C(1; 1; 0)$ et $H(0; 1; 1)$, donc :

$$J\left(\frac{x_C+x_H}{2}; \frac{y_C+y_H}{2}; \frac{z_C+z_H}{2}\right) = J\left(\frac{1+0}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right) = \boxed{J\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)}$$

b) Montrons que I, J et H ne sont pas alignés :

$$\vec{IJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{IH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{x_{IH}}{x_{IJ}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1 \text{ et } \frac{y_{IH}}{y_{IJ}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$-1 \neq 1$, donc $\vec{IJ}$ et $\vec{IH}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles et à ce titre ne sont pas colinéaires.

Donc I, J et H non alignés : trois points non alignés forment un unique plan, ici (IJH) .

Exercice 1

$$C(1; 1; 0); F(0; 1; 1)$$

$$H(1; 0; 1) \quad G(1; 1; 1), \text{ donc } K \text{ est le milieu de } [HG], K\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+1}{2}\right)$$

$$K\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$$

$$\vec{CF} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{CK} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \frac{y_{CF}}{y_{CK}} = \frac{0}{-\frac{1}{2}} = 0 \text{ et } \frac{z_{CF}}{z_{CK}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Or $0 \neq 1$, donc $\vec{CF}$ et $\vec{CK}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles.

$\vec{CF}$ et $\vec{CK}$ ne sont pas colinéaires, donc les points C, F, K ne sont pas alignés et définissent donc un unique plan : le plan (CFK) .

1a) (d) passe par $A(0; 1; 4)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (d), donc une R-P de (d) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

1b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (d) et par lecture de la R-P donnée de (d'), $\vec{u}' \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ dirige (d').

Or $\frac{x_{u'}}{x_u} = \frac{5}{1} = 5$ et $\frac{y_{u'}}{y_u} = \frac{2}{-1} = -2$. Or $5 \neq -2$, donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires, et par suite, (d) et (d') ne sont pas parallèles.

1-c) (d) et (d') ne sont pas parallèles donc soit elles sont sécantes ou non coplanaires.

Étudions l'intersection de (d) et (d').

Soit $M(x; y; z)$

$$M \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow \exists (t; t') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = t = -1 + 5t' \\ y = t = 2 + 2t' \\ z = 4 + t = 3 - 9t' \end{cases}$$

$$\text{Donc: } \begin{cases} t = 5t' - 1 \\ 2t' = -1 - (5t' - 1) \\ -9t' = 5t' - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5t' - 1 \\ 2t' = -5t' \\ -9t' = 5t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Système compatible. Oui!

$$\text{Donc: } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ainsi les droites (d) et (d') sont sécantes et se coupent au point $M(-1; 2; 3)$.

2) Par lecture de la R-L donnée, $\vec{w} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige (A), et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (d).

Or $\vec{w} = -4\vec{u}$, donc $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc (d) et (A) sont parallèles.

$A(0; 1; 4) \in (d)$. Montrons que $A \notin (A)$:

$$A(0; 1; 4) \in (A) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq: } \begin{cases} 0 = 9 - 4\lambda \\ 1 = 2 + 4\lambda \\ 4 = 13 - 4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{9}{4} \\ \lambda = -\frac{1}{4} \\ \lambda = \frac{9}{4} \end{cases} \text{ : absurde car } \frac{9}{4} \neq -\frac{1}{4}$$

Donc $A \notin (A)$, par suite (d) et (A) sont strictement parallèles.

Exercice II

On cherche s'il existe un réel t tel que: $\begin{cases} x_N = 1 + 2t \\ y_N = -2 + t \\ z_N = 4 - t \end{cases}$ c'est à dire: $\begin{cases} 2 = 1 + 2t & (L_1) \\ 1 = -2 + t & (L_2) \\ -1 = 4 - t & (L_3) \end{cases}$

(L2) conduit à: $t = 3$ et (L3) à: $t = 5$: Or $3 \neq 5$. donc le système est incompatible (les déductions) et par suite $N(2; 1; -1)$ n'appartient pas à la droite A.

Exercice III

1) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\frac{x_{AB}}{x_{AC}} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ et $\frac{y_{AB}}{y_{AC}} = \frac{0}{4} = 0$. $-\frac{1}{3} \neq 0$, donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

2a) d'après q.1), A, B, C non alignés forment le plan (ABC).

Pour prouver que A, B, C et D sont coplanaires, montrons l'existence de réels a et b tels que :

$$\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC} \quad (*)$$

OR $\vec{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$: Initialement (car $y_{AB} = 0$) on a : $\boxed{\vec{AD} = 4\vec{AB} + \vec{AC}}$: $\vec{AD}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ (non colinéaires), donc $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires et par suite A, B, C, D sont coplanaires.

Remarque : Pour qui est fâché avec le calcul mental, (*) conduit au système : $\begin{cases} a - 3b = 1 \\ 4b = 4 \\ -a + b = -3 \end{cases}$ qui se résout alors facilement : $\begin{cases} b=1 \\ a-3=1 \\ -a+1=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} b=1 \\ a=4 \\ a=4 \end{cases} \quad \text{système compatible}$

2b) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, donc $\vec{CD} = 4\vec{AB}$: ainsi (AB) et (CD) sont parallèles car $\vec{CD}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires et par suite, ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].

Exercice IV

Regardons si $C(5; 0; -3)$ appartient (ou pas) à chacune des droites $\mathcal{D}$ et (AB).

$$C(5; 0; -3) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 5 = -t + 3 \\ 0 = t + 2 \\ -3 = 2t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = \frac{-3-1}{2} = -2 \end{cases} \quad \text{= système compatible}$$

donc $C \in \mathcal{D}$ (C est le point de paramètre $t = -2$ de la droite $\mathcal{D}$).

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige (AB) qui passe aussi par A(2; 1; -1), donc une représentation paramétrique

$$\text{de (AB) est : } \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

d'où là (calcul mental) C est le point de paramètre $\lambda = -1$ de (AB) : Ainsi $C \in (AB)$.

Ainsi, $\mathcal{D}$ et (AB) ont le point C en commun : elles sont sécantes en C ou bien confondues

OR $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$, et clairement, $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ non colinéaires - donc $\mathcal{D}$ et (AB) non

parallèles et se coupent en C : Affirmation VRAIE.

Exercise V

Supposons A, B, C, D coplanaires (raisonnement par l'absurde).

Mais comme A, C, D non alignés, ils forment le plan (ACD) .

Par suite, $B \in (ACD)$, donc il existerait des réels a et b tels que : $\vec{AB} = a\vec{AC} + b\vec{AD}$. (*)

Or $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. L'égalité vectorielle (*) se traduit sur les

$$\text{coordonnées par : } \begin{cases} -2 = 2a - 2b \\ 4 = 4a \\ 3 = a + 4b \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} a = 1 \\ -2 = 2 - 2b \\ 3 = 1 + 4b \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ b = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{donc } 1 = \frac{1}{2} \\ \text{Absurde} \end{array} \right.$$

Ainsi A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Exercise VII

a) $\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{AF}$ (choix). On $\vec{AF} = \vec{DE}$.

$$\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{DE} = \vec{DA} + \vec{DC} + \vec{CE} = \vec{DA} + \vec{DC} + \frac{1}{2}\vec{BC} \quad \text{car } \vec{CE} = \frac{1}{2}\vec{BC}.$$

$$\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{DC} + \frac{1}{2}(\vec{BD} + \vec{DC}) \quad (\text{choix again!})$$

$$\boxed{\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{DC} + \frac{1}{2}\vec{BD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \vec{DA} + \frac{3}{2}\vec{DC} - \frac{1}{2}\vec{DB}} \quad \text{car } \vec{BD} = -\vec{DB}.$$

b) $\vec{DJ} = \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{DB})$ et $\vec{DK} = \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{DC})$, donc :

$$-\vec{DJ} + 3\vec{DK} = -\frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{DB}) + \frac{3}{2}(\vec{DA} + \vec{DC}) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\vec{DA} - \frac{1}{2}\vec{DB} + \frac{3}{2}\vec{DC}.$$

$$\boxed{-\vec{DJ} + 3\vec{DK} = \vec{DA} + \frac{3}{2}\vec{DC} - \frac{1}{2}\vec{DB}}.$$

d'après que), on a bien : $\boxed{\vec{DF} = -\vec{DJ} + 3\vec{DK}} \quad (*)$

Comme D, J, K ne sont pas alignés ils forment un plan, le plan (DJK) .

(*) dit que $\vec{DF}$ est une C.B.L des vecteurs $\vec{DJ}$ et $\vec{DK}$ non colinéaires.

donc D, F, J et K sont coplanaires.

Exercice VI

1) Le plus simple est ici est de prouver que les coordonnées de A et celles de B vérifient la représentation paramétrique donnée (qui est celle d'une droite):

#calcul mental: $A(1;0;-3)$ est le point de paramètre $t=2$ de la droite donnée.

$B(-2;-1;0)$ est le point de paramètre $t=1$ de la droite donnée

OR A et B sont distincts et appartiennent à cette droite. Ainsi la R-P donnée est bien une R-P de la droite (AB).

Méthode Bis: $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ dirige (A), or (A) est la droite dont une R-P est donnée l'énoncé.

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Or $\vec{u} = \vec{AB}$: (AB) et (A) sont parallèles.

de plus, $A(1;0;-3) \in (AB)$ et $A(1;0;-3) \in (A)$: point de paramètre $t=2$.

Ainsi (AB) et (A) sont parallèles et ont le point A en commun. Or (AB) et (A) sont confondues: La R-P de l'énoncé est bien une R-P de la droite (AB).

2) De part la R-P donnée, (d') est dirigée par $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{v}$ et $\vec{AB}$ non colinéaires, car ayant même abscisse, s'ils étaient colinéaires, ils auraient même ordonnée et ici $1 \neq -2$.

Or (AB) et (d') ne sont pas parallèles.

Étudions l'intersection de (AB) et (d'):

$$M(x;y;z) \in (AB) \cap (d') \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R} \text{ tels que: } \begin{cases} x = 3t - 5 = -2 + 3k \\ y = t - 2 = -1 - 2k \\ z = -3t + 3 = 1 + k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3t - 5 = -2 + 3k \\ t = 1 - 2k \\ -3(1 - 2k) + 3 = 1 + k \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1 - 2k \\ 3(1 - 2k) - 5 = -2 + 3k \\ -3 + 6k + 3 = 1 + k \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1 - 2k \\ 3 - 6k - 5 = -2 + 3k \\ 6k = k + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 - 2k \\ k = 0 \\ k = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Le système est incompatible. Or (AB) et (d') ne sont pas parallèles et d'intersection vide, il en résulte que

(AB) et (d) ne sont pas coplanaires.

