

Exercice I

On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^{\sqrt{x}}$

- a. La fonction g est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, donc $\forall x \in]0 ; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x).$$

- b. La fonction f est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, donc $\forall x \in]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \times 2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{\frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. a. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{x} = 0$ avec $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

- b. Donc C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3. a. D'après les croissances comparées, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ donc par composition de limites (en posant $u(x) = \sqrt{x}$) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- b. $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $\sqrt{x} - 1$.

$$\sqrt{x} - 1 \geq 0 \iff \sqrt{x} \geq 1 \iff x \geq 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{e}{2}$	$+\infty$

- c. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ à valeurs dans $\left[\frac{e}{2} ; +\infty\right[$. Or $2 \in \left[\frac{e}{2} ; +\infty\right[$ (car $\frac{e}{2} < 2$) donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution notée α dans $[1 ; +\infty[$. À la calculatrice : $\alpha \approx 4,6$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}$$

a. On pose $\forall x \in]0; +\infty[, X = \sqrt{x}$.

$$x - 3\sqrt{x} + 3 = X^2 - 3X + 3.$$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$ donc $\forall X \in]0; +\infty[, X^2 - 3X + 3 > 0$ donc $\forall x \in]0; +\infty[, x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$.

b. $\forall x \in]0; +\infty[, e^{\sqrt{x}} > 0$ et $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ et $8x^2\sqrt{x} > 0$ donc $f''(x) > 0$.

La fonction f est convexe sur $]0; +\infty[$.

Exercice II

1) $\binom{42}{10} = 1471442973$ (Nombre de parties de cardinal 10 possibles dans un ensemble de cardinal 42),

2a) Elle choisit 5 femmes parmi 22 femmes : $\binom{22}{5}$ choix

Elle choisit 5 hommes parmi 20 hommes : $\binom{20}{5}$ choix

Par principe multiplicatif, elle a : $N = \binom{22}{5} \times \binom{20}{5} = 408282336$

$N = 408282336$ choix possibles d'équipes avec parité.

2b) Elle doit choisir les 10 joueurs parmi 18 femmes, donc $\binom{18}{10}$ choix -

$\binom{18}{10} = 646646$ équipes exclusivement féminines.

2c) $\underbrace{\binom{42}{10}}_{\text{nb total d'équipes}} - \underbrace{\binom{22}{10}}_{\text{nb équipes avec que des femmes}} - \underbrace{\binom{20}{10}}_{\text{nb d'équipes avec que des hommes}} = 147061571$ équipes sont mixtes.

(Ici on a l'ensemble des équipes qui est l'union disjointe des équipes mixtes, équipes avec que des femmes et équipes avec que des hommes : par complémentarité :

$$\binom{42}{10} = \text{Nb total} + \binom{22}{10} + \binom{20}{10},$$

2d) Son équipe doit avoir 6 femmes et 4 hommes.

avec elle a : $\binom{22}{6} \times \binom{20}{4}$ choix pour un total de $\binom{42}{10}$ combinaisons possibles

avec $p = \frac{\binom{22}{6} \times \binom{20}{4}}{\binom{42}{10}} = \frac{74612 \times 4845}{1471442973}$ (formule d'équiprobabilité).

$p \approx 0,246 \text{ à } 10^{-3}$ près.

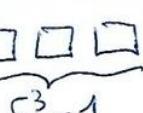
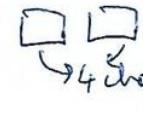
Exercice III

1) D'après le principe multiplicatif on a: $24 \times 24 \times (10 \times 10 \times 10 - 1) \times 24 \times 24$ plages!
 Pas de 000.
 $24^4 \times 999 = 531444224$ plages d'instruction avec un tel système -

2) On choisit en bloc 2 choix possibles (Bloc de gauche // Bloc de droite).
 On choisit la lettre qui va être déboulé au sein d'un bloc : 24 choix possibles.
 On écrit deux lettres distinctes dans l'autre bloc donc on a: 24×23 possibles par ce bloc.
 Les deux lettres distinctes n'interviennent pas. (999 possibles)
 Le bloc de chiffres n'intervient pas -
 En 1^{er} X on a: $2 \times 24 \times 24 \times 23 \times 999$ telles plages -
 Donc $P = \frac{2 \times 24 \times 24 \times 23 \times 999}{24^4 \times 999} = \frac{2 \times 23}{24 \times 24} = \frac{46}{576} = \frac{23}{283} (\approx 0,081)$,
 on retrouve qu'ici les valeurs des chiffres n'ont pas d'incidence sur le résultat

3) On choisit deux lettres par le 1^{er} bloc: $24^2 = 576$ possibles.
 999 choix pour les 3 chiffres.
 1 seul choix (fixé par le 1^{er} bloc) pour le 3^e bloc
 alors $576 \times 999 = 575424$ ont leur 3^e bloc identique et donc il reste que le 1^{er} bloc -

4) Il y a ici quatre voyelles: A-E-U-Y. Et 5 chiffres pour on exclut 000,
 donc par principe multiplicatif (et listes --): $4 \times 4 \times (5^3 - 1) \times 4 = 4^4 \times 124 = 31744$

		
4 choix de voyelle	$5^3 - 1$	9 choix de voyelle possibles (diff. vu) (excluant du 000)

Il y a 31744 plages avec que des voyelles et que des chiffres possibles -

Exercice IV

a) $m! + (m+1)! = m! + m! \times (m+1) = m!(1+m+1) = (m+2)m!$

b) Autant que de façons de choisir 3 éléments (les 3) parmi 9 cases: $\binom{9}{3}$.
 $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6 \times 6!} = 84$: Il y a 84 grilles -

Il y a: 3 colonnes, 3 lignes et 2 diagonales, donc $3+3+2=8$ cas favorables -

Notons G l'événement: le hibou est gagnant. $P(G) = \frac{8}{84} = \boxed{\frac{2}{21}}$

Exercice V

Note E

S'il obtient pile pour la 3^e fois au dixième lancer, cela signifie qu'on a obtenu deux piles lors des 9 premiers lancers.



On choisit deux places pour les piles: $\binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$ possibles.

$$\text{Par indépendance des lancers } P(\text{2 piles lors des 9 lancers}) = \frac{36 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7}{1024}$$

$$\text{Alors } P(E) = 36 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \times \frac{1}{2} = 36 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 36 \times \frac{1}{1024} = \frac{36}{1024}$$

↑ pile au 10^e lancer

$$P(E) = \frac{36}{1024} = \frac{18}{512} = \frac{9}{256}$$

$$P(E) \approx 0,035 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Exercice VI

1) Il y a $7^3 = 343$ 3-uplets d'éléments de E ($\text{card}(E) = 7$).

$$\text{Il y a: } \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{24 \times 6!} = 210 \text{ combinaisons à 4 éléments de F.}$$

Or $343 > 210$ donc l'affirmation 1 est VRAIE.

2) Faux! Il y a $20 \times 30 = 600$ serrages de mains! Pas \leq et pas $\geq + iu!$

3) A = "Avoir des 5 numéros du 16/01 me renvoient le 23/01".

$$P(A) = \frac{\binom{44}{5} \times 9}{\binom{49}{5} \times 10} \quad \begin{array}{l} \text{on "évoit" 5 numéros parmi les 49-5=44 non sortis.} \\ \text{et la même chose sauf de celles tombées le 16/01.} \end{array}$$

$$P(A) = \frac{\frac{44!}{5!39!} \times 9}{\frac{43!}{8!44!} \times 10} = \frac{44! \times 9 \times 8! \times 44!}{5! \times 39! \times 49! \times 10} = \frac{(44!)^2}{10 \times 39! \times 49!} \approx 0,513$$

L'affirmation 3 est donc VRAIE.

4) Cela revient à arranger le trio de filles = arranger de 3 paires de 90

Puis on arrange les 7 suivants: arrangement de 7 paires $< 160 - 3$.

$$\text{Il y a donc } N = \frac{90!}{(90-3)!} \times \frac{157!}{(157-7)!} = \frac{90! \times 157!}{87! \times 150!} \neq \frac{90! \times 157!}{87! \times 160!}$$

L'affirmation 4 est donc FAUSSE.

5)

choix fixé
26 choix de lettres
par les 3 dernières cases

$$\text{Donc il y a: } 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^4 = 456.976 \text{ mots palindromes de 7 lettres.}$$

L'affirmation 5 est VRAIE.