Exercice I

On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

a. La fonction g est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x).$$

b. La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} - \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \times 2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{\frac{\sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. **a.** $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2\sqrt{x} = 0$ avec $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

b. Donc C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3. **a.** D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty$ donc par composition de limites (en posant $u(x) = \sqrt{x}$) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{\sqrt{x}} > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $\sqrt{x} - 1$.
$\sqrt{x} - 1 \geqslant 0 \iff \sqrt{x} \geqslant 1 \iff x \geqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{\mathrm{e}}{2}$	↗	$+\infty$

c. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ à valeurs dans $\left[\dfrac{\mathrm{e}}{2}\,;\,+\infty\right[$. Or $2 \in \left[\dfrac{\mathrm{e}}{2}\,;\,+\infty\right[$ (car $\dfrac{\mathrm{e}}{2} < 2$) donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution notée α dans $[1;+\infty[$.
À la calculatrice : $\alpha \approx 4,6$.

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\ f''(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}(x-3\sqrt{x}+3)}{8x^2\sqrt{x}}$

a. On pose $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\ X = \sqrt{x}$.
$x - 3\sqrt{x} + 3 = X^2 - 3X + 3$.
$\Delta = (-3)^2 - 4\times 1\times 3 = -3 < 0$ donc $\forall X \in]0\,;\,+\infty[,\ X^2 - 3X + 3 > 0$ donc $\forall x \in]0;+\infty[,\ x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$.

b. $\forall x \in]0;+\infty[,\ e^{\sqrt{x}} > 0$ et $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ et $8x^2\sqrt{x} > 0$ donc $f''(x) > 0$.
La fonction f est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice II

1) $\binom{42}{10} = 1471442973$ (Nombre de parties de cardinal 10 prises dans un ensemble de cardinal 42).

2a) Elle choisit 5 femmes parmi 22 femmes : $\binom{22}{5}$ choix
Elle choisit 5 hommes parmi 20 hommes : $\binom{20}{5}$ choix
Par principe multiplicatif, elle a : $N = \binom{22}{5}\times\binom{20}{5} = 408\,282\,336$
$N = 408282336$ choix possibles d'équipes avec parité.

2b) Elle doit choisir les 10 joueurs parmi les femmes, donc $\binom{22}{10}$ choix.
$\binom{22}{10} = 646.646$ équipes exclusivement féminines.

2c) $\underbrace{\binom{42}{10}}_{\text{nb total d'équipes}} - \underbrace{\binom{22}{10}}_{\text{nb équipes avec que des femmes}} - \underbrace{\binom{20}{10}}_{\text{nb d'équipes avec que des hommes.}} = 1470611571$ équipes sont mixtes.

(Ici on a l'ensemble des équipes qui est l'union disjointe des équipes mixtes, équipes avec que des ♀ et équipes avec que des ♂ : par principe additivité :
$\binom{42}{10} = \text{Nb cherché} + \binom{22}{10} + \binom{20}{10}$

2d) Son équipe doit avoir : 6 ♀ et 4 ♂.
Alors elle a : $\binom{22}{6}\times\binom{20}{4}$ choix pour un total de $\binom{42}{10}$ combinaisons possibles.
Alors $p = \dfrac{\binom{22}{6}\times\binom{20}{4}}{\binom{42}{10}} = \dfrac{74613\times 4845}{1471442973}$ (formule d'équiprobabilité).
$p \simeq 0{,}246$ à 10^{-3} près.

Exercice III

1) D'après le principe multiplicatif on a : $24\times24\times(\underbrace{10\times10\times10-1}_{\text{Pas de 000.}})\times24\times24$ plaques!

$24^4\times999=331444224$ plaques d'immatriculation avec un tel système.

2) On choisit un bloc : deux possibles (Bloc de gauche || Bloc de droite).

On choisit la lettre qui va être dédoublée au sein d'un bloc : 24 choix possibles.

On écrit deux lettres distinctes dans l'autre bloc donc on a : 24×23 possibles pour ce bloc.

Le bloc de chiffres n'intervient pas. (999 possibles)

Par p^e × on a : $2\times24\times24\times23\times999$ telles plaques.

donc $p=\dfrac{2\times24\times24\times23\times\cancel{999}}{24^4\times\cancel{999}}=\dfrac{2\times23}{24\times24}=\dfrac{46}{576}=\dfrac{23}{283}$ $(\simeq 0{,}081)$.

on retrouve qu'ici les valeurs chiffrées n'ont pas d'incidence sur le résultat

3) On choisit deux lettres pour le 1° bloc : $24^2=576$ possibles.

999 choix pour les 3 chiffres.

1 seul choix (fixé par le 1° bloc) pour le 3° bloc

donc $576\times999=575424$ ont leur 3e bloc identique et dans le même ordre que le 1er bloc.

4) Il y a ici quatre voyelles : A-E-U-Y. Et 5 chiffres pairs — on exclut 000!

donc par p^{le} multiplicatif (et listes ...) : $4\times4\times(5^3-1)\times4\times4=4^4\times124=31744$

4 choix de voyelle — 5^3-1 possibles (déjà vu) (exclusion du 000) — 4 choix de voyelles.

Il y a 31744 plaques avec que des voyelles et que des chiffres pairs.

Exercice IV

a) $n!+\underline{(n+1)!}=n!+\underline{n!\times(n+1)}=n!(1+n+1)=(n+2)n!$

b) Autant que de façons de choisir (placer) 3 éléments (les ♡) parmi 9 cases : $\binom{9}{3}$.

$\binom{9}{3}=\dfrac{9!}{3!\,6!}=\dfrac{9\times8\times7\times\cancel{6!}}{6\times\cancel{6!}}=84$: Il y a 84 telles grilles.

Il y a : 3 colonnes, 3 lignes et 2 diagonales, donc $3+3+2=\underline{8}$ cas favorables.

Notons G l'évènement : le ticket est gagnant : $\boxed{P(G)}=\dfrac{8}{84}=\boxed{\dfrac{2}{21}}$

Exercice V

Noté E

Si on obtient Pile pour la 3^e fois au dixième lancer, cela signifie qu'on a obtenu deux Pile lors des 9 premiers lancers.

$\underbrace{\square_1 \square_2 \square_3 \square_4 \square_5 \square_6 \square_7 \square_8 \square_9}$ $\boxed{P}_{10}$

On choisit deux places pour les piles : $\binom{9}{2} = \frac{9\times 8}{2} = 36$ possibles.

Par indépendance des lancers $P(2\text{ Pile lors des 9 lancers}) = \underline{36\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^7}$

donc $P(E) = 36\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\times\frac{1}{2} = 36\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 36\times\frac{1}{1024} = \frac{36}{1024}$

Pile au 10^e lancer

$\boxed{P(E)} = \frac{36}{1024} = \frac{18}{512} = \boxed{\frac{9}{256}}$

$\underline{P(E)\simeq 0{,}035 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$

Exercice VI

1) Il y a $7^3 = 343$ 3-uplets d'éléments de E ($\text{card}(E)=7$).

Il y a : $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10\times9\times8\times7\times\cancel{6!}}{24\times\cancel{6!}} = 210$ combinaisons à 4 éléments de F.

Or $343 > 210$, donc <u>l'affirmation est VRAIE.</u>

2) <u>Faux</u> ! Il y a $20\times30 =$ <u>600 serrages de mains</u> ! P^{ce} $\times$ et pas P^{ce} $+$ ici !

3) A = "Aucun des 5 numéros du 16/01 ne ressort le 23/01".

$P(A) = \dfrac{\binom{44}{5}\times 9}{\binom{49}{5}\times 10}$ → on "choisit" 5 numéros parmi les $49-5=44$ non sortis et le même chance différent de celui tombé le 16/01.

$P(A) = \dfrac{\frac{44!}{5!39!}\times 9}{\frac{49!}{5!44!}\times 10} = \dfrac{44!\times9\times\cancel{5!}\times44!}{\cancel{5!}\,39!\,49!\times10} = \dfrac{(44!)^2}{10\times39!\times49!}\simeq 0{,}513$

<u>L'affirmation 3 est donc Vraie.</u>

4) Cela revient à arranger le trio de filles : arrangement de 3 parmi 90

Puis on arrange les 7 suivants : arrangement de 7 parmi 157 ($=160-3$).

Il y a donc $N = \frac{90!}{(90-3)!}\times\frac{157!}{(157-7)!} = \frac{90!\times157!}{87!\times150!} \neq \frac{90!\times157!}{87!\times160!}$

<u>L'affirmation 4 est donc Fausse.</u>

5) $\underbrace{\boxed{\sim}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{+}}_{\text{choix fixé pour les 3 dernières lettres}}\ \boxed{\times}\ \boxed{+}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\sim}$

26 choix de lettres

Donc il y a : $26\times26\times26\times26 = 26^4 =$ <u>456.976 mots palindromes de 7 lettres.</u>

<u>L'affirmation 5 est vraie.</u>