

Exercice I

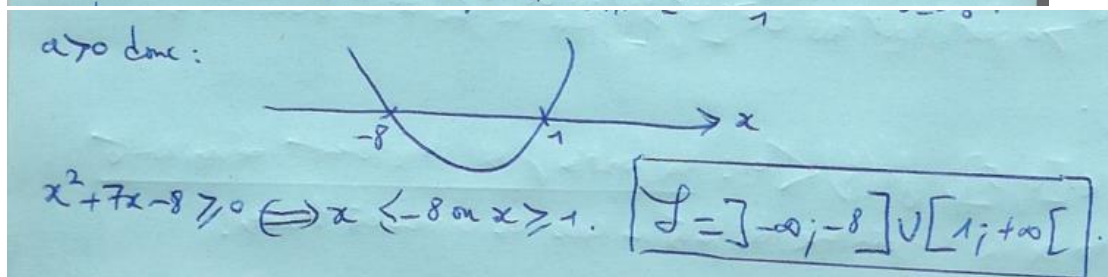
- 1) Réponse A.
- 2) Réponse D.

Exercice II

$$\begin{aligned}
 1) \quad A &= e^{11} \times e^{-3} = e^{11+(-3)} = e^8 = \boxed{8} ; \quad B = (e^{-5})^3 = e^{-5 \times 3} = e^{-15} = \boxed{-15} \\
 C &= \frac{e^3 \times (e^2)^2}{e^{-2} \times e} = \frac{e^3 \times e^4}{e^{-2+1}} = \frac{e^7}{e^{-1}} = \frac{e^7}{e^{-1}} = \boxed{1} ; \quad D = e^{-\frac{1}{2}} \times \frac{e^{-2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} \times \frac{e^{-2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-2}}{e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} = \frac{e^{-2}}{e^1} = \frac{e^{-2}}{e} = \boxed{-2} \\
 2) \quad E &= (e^t - 1)^2 = (e^t)^2 - 2 \times e^t \times 1 + 1^2 = \boxed{2t} \\
 F &= 3e^x(e^x - e^{-x}) - 5(e^x)^2 \\
 F &= 3e^x e^x - 3e^x e^{-x} - 5e^{2x} \\
 F &= 3e^{2x} - 3e^0 - 5e^{2x} = \boxed{-2e^{2x} - 3}
 \end{aligned}$$

Exercice III

$$\begin{aligned}
 1) \quad \text{Pour tout réel } x, \quad 1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} &= 1 - \frac{\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = 1 - \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = 1 - \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} \\
 \boxed{1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}} &= 1 - \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \boxed{\frac{1}{e^x+1}} \\
 2) \quad a) \quad e^{-x+2} &= 1 = e^0 \Rightarrow -x+2=0 \Rightarrow x=2. \quad \boxed{J=\{2\}} \\
 b) \quad e^{2x+1} &= \frac{1}{e} = e^{-1} \Rightarrow 2x+1=-1 \Rightarrow 2x=-1-1=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{2}=-1 \quad \boxed{J=\{-1\}} \\
 c) \quad (e^{-x} + e)(e^x - e) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} + e = 0 \\ \text{ou} \\ e^x - e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} = -e \rightarrow \text{pas de solution car } e^{-x} > 0 \text{ pour tout } x \\ \text{ou} \\ e^x = e = e^1 \end{cases} \\
 &\Rightarrow x=1. \quad \boxed{J=\{1\}} \\
 d) \quad e^{-x^2} - e^{7x-8} &\leq 0 \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{7x-8} \Rightarrow -x^2 \leq 7x-8 \Rightarrow x^2+7x-8 \geq 0. \\
 \text{On anticipe avec la règle de Viète, donc } x_1 \times x_2 &= \frac{c}{a} \quad (x_1=1; c=-8; a=1) \\
 \text{La seconde racine } x_2 \text{ vérifie : } 1 \times x_2 &= -\frac{8}{1} \text{ donc } x_2 = -8.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 e) \quad 2xe^{-x} + 3e^{-x} &\geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}(2x+3) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+3 \geq \frac{0}{e^{-x}} \text{ car } e^{-x} > 0 \text{ pour tout } x \\
 &\Leftrightarrow 2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2} \quad \boxed{J = [-\frac{3}{2}; +\infty[}
 \end{aligned}$$

Exercise IV

a) $f'(0) = \text{Coefficient directeur de } T = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 1}{-2 - 0} = -\frac{1}{2}$.

$f'(0) = -\frac{1}{2}$

b) $f(x) = e^{Rx}$ | donc $f'(x) = R e^{Rx}$

c) $f'(0) = -\frac{1}{2} \text{ (q.a.)} \Leftrightarrow R e^{R \cdot 0} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow R e^0 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow R = -\frac{1}{2} \text{ car } e^0 = 1$.

Donc pour tout réel x , $f(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

Exercise V

Pour tout entier naturel n , par : $u_n = 2 \frac{e^{1,5n}}{(e^n - 1)^2} = 2 \frac{e^{1,5n}}{e^{2n-2}} = 2e^{1,5n - (2n-2)} = 2e^{-0,5n+2}$

Donc $u_{n+1} = 2e^{-0,5(n+1)+2} = 2e^{-0,5n+1,5} = e^{0,5} \times 2e^{-0,5n+2} = e^{0,5} \times u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = e^{0,5} = \sqrt{e}$.

Son premier terme est $u_0 = 2e^{-0,5 \times 0 + 2} = 2e^2$.

Exercise VI

a) Pour tout réel x , $f(x) = (6x-2)e^x = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = 6x-2 \\ u'(x) = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) = e^x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 6e^x + (6x-2)e^x = e^x(6+6x-2) = (6x+4)e^x$

b) Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $f'(x) = (6x+4)e^x$ a le même signe que $6x+4$.

Ainsi, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x+4 \geq 0 \Leftrightarrow 6x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{6} \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$.

on a :

	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$f(-\frac{2}{3}) = (6(-\frac{2}{3})-2)e^{-\frac{2}{3}} = -6e^{-\frac{2}{3}}$

d) Soit $A(0; f(0))$ avec $f(0) = (6 \times 0 - 2)e^0 = -2$. Notons T_A la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A .

T_A a pour équation réduite : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = (6 \times 0 + 4)e^0 = 4$.

$y = 4x - 2$

Exercice VII

$t \geq 0$ et $f(t) = \frac{120e^t}{e^t + 3}$.

a) Pour $t=0$: $\boxed{f(0)} = \frac{120e^0}{e^0 + 3} = \frac{120 \times 1}{1 + 3} = \frac{120}{4} = \boxed{30}$: Le chiot mesurait 30 cm de haut au jour de son adoption.

b) $f(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$ avec: $\begin{cases} u(t) = 120e^t \\ u'(t) = 120e^t \end{cases} \quad \begin{cases} v(t) = e^t + 3 \\ v'(t) = e^t + 0 = e^t \end{cases}$.

donc $f'(t) = \frac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{v^2(t)} = \frac{120e^t(e^t + 3) - 120e^t \times e^t}{(e^t + 3)^2} = \frac{\cancel{120e^{2t}} + 360e^t - \cancel{120e^{2t}}}{(e^t + 3)^2}$

$\boxed{f'(t) = \frac{360e^t}{(e^t + 3)^2}}$

c) $e^t > 0$, $360 > 0$ et $(e^t + 3)^2 > 0$ pour tout réel $t \geq 0$, donc $f'(t) > 0$ sur $[0; +\infty[$.
 Après le principe de l'usage, f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

d) On veut que $\frac{f(t)}{(1m=100cm)} > 100$ (pour la première fois) se produise lorsque $t=3$ car $f(2) \approx 85,3$ et $f(3) \approx 104,4$.
 Trois mois après l'adoption le chiot sera devenu adulte.

Algo :

```

• from math import*
• def chiotadulte():
•     t=0
•     while 120*exp(t)/(exp(t)+3)<100:
•         t=t+1
•     return(t)
    
```