

Exercice 0

a) X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 30$ et $p = 0,9$, car on répète 30 fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli et le succès est marquer le panier.

b) $P(X = 15) = \binom{30}{15} \times 0,9^{15} \times 0,1^{15} \approx 3 \times 10^{-8}$.

c) Rater au moins un panier signifie que X n'est pas égale à 30, donc que $X \leq 29$.

$$P(X \leq 29) = \sum_{k=0}^{29} P(X = k) = \sum_{k=0}^{29} \binom{30}{k} \times 0,9^k \times 0,1^{30-k}.$$

Avec la calculatrice : $P(X \leq 29) \approx 0,9576$.

d) $P(27 \leq X \leq 29) = P(X=27) + P(X=28) + P(X=29) \approx 0,647$.

e)
 $E(X) = np = 30 \times 0,9 = 27$. En moyenne, il peut s'attendre à 27 paniers réussis par salve de 30 lancers.

Exercice I

1a) $A(1; 2; 3)$ $B(-1; 4; 5)$

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1-1=-2 \\ 4-2=2 \\ 5-3=2 \end{pmatrix}$ dirige (AB), donc $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige également (AB) car $\vec{AB} = 2\vec{u}$.

Rq : essayer, si possible, de prendre un vecteur directeur dont les coordonnées sont "les plus petites" possibles.

Un R-P de (AB) dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et passant par $A(1; 2; 3)$ est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + (-1)t \\ y = 2 + 1t \\ z = 3 + 1t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

En simplifiant, un R-P de (AB) est donc :

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1b) Soit (A) la droite passant par $C(0; 0; 11)$ et parallèle à (AB) : Vu que $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (AB) et que (AB) // (A), $\vec{u}$ dirige également (A), de sorte que, un R-P de la droite (A)

est donc :

$$\begin{cases} x = 0 - t' = -t' \\ y = 0 + t' = t' \\ z = 11 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

② $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0-1=-1 \\ 0-2=-2 \\ 11-3=8 \end{pmatrix}$. Or $\frac{-2}{-1} = 2$ et $\frac{2}{-2} = -1$. Vu que $2 \neq -1$ on conclut que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles, et à ce titre, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés et forment donc un unique plan, le plan (ABC).

③ $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige (AB) et $\vec{CD} \begin{pmatrix} 3-0=3 \\ 0-0=0 \\ 1-11=-10 \end{pmatrix}$ dirige (CD).

$\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont non colinéaires car $\frac{3}{-2} \neq \frac{0}{2}$, donc (AB) et (CD) ne sont ni parallèles, ni confondues.

Étudions l'intersection de (AB) et (CD), en commençant par donner un R-P de (CD) :

$\vec{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ dirige (CD) et (CD) passe par $C(0; 0; 11)$, donc un R-P de (CD) est :

$$\begin{cases} x = 0 + 3\lambda = 3\lambda \\ y = 0 + 0\lambda = 0 \\ z = 11 - 10\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

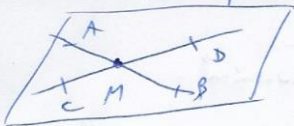
$M(x; y; z) \in (AB) \cap (CD) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-t = 3\lambda \\ y = 2+t = 0 \\ z = 3+t = 11-10\lambda \end{cases} \begin{cases} t = -2 \\ 1-(-2) = 3\lambda \\ 3-2 = 11-10\lambda \end{cases}$$

Par suite, $x = 1-t = 1-(-2) = 3$
 $y = 0$
 $z = 3+t = 3+(-2) = 1$, donc $M(3; 0; 1)$ est le point d'intersection des droites

(AB) et (CD) qui sont donc sécantes en ce point M.

On en déduit que les points A, B, C et D sont COPLANAIRES car deux droites réelles sont coplanaires.



④ ACBE est un pgm $\Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{EB}$

Soit $E(x; y; z)$: $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{EB} = \begin{pmatrix} -1-x \\ 4-y \\ 5-z \end{pmatrix}$

$$\left\{ \vec{AC} = \vec{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -1-x \\ -2 = 4-y \\ 8 = 5-z \end{cases} \right.$$

2 vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4+2=6 \\ z=5-8=-3 \end{cases}$. donc $E(0; 6; -3)$ et ACBE est un pgm.

Soit K le centre de ACBE. K est le point d'intersection des diagonales $[AB]$ et $[CE]$ de ce pgm. Or un pgm a des diagonales qui se coupent en leur milieu, donc $K = \text{Milieu de } [AB]$.

Par suite, $K\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$, $K\left(\frac{1+(-1)}{2}; \frac{2+4}{2}; \frac{3+5}{2}\right)$, $\boxed{K(0; 3; 4)}$

⑤ $F(-4; 4; 15)$ et $A(1; 2; 3)$, donc $\vec{AF} = \begin{pmatrix} -4-1 \\ 4-2 \\ 15-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ (déjà vu q. précédente).

donc, $a\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2a \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix}$ et $b\vec{AC} = \begin{pmatrix} -b \\ -2b \\ 8b \end{pmatrix}$, donc $a\vec{AB} + b\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2a-b \\ 2a-2b \\ 2a+8b \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{AF} = a\vec{AB} + b\vec{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -2a-b \\ 2 = 2a-2b \\ 12 = 2a+8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a+5 \\ 2 = 2a-2(-2a+5) = 6a-10 \\ 12 = 2a+8(-2a+5) = -14a+40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a+5 \\ 6a = 12 \\ 14a = 20-12 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{système compatible!} \\ b = -2 \times 2 + 5 = 1 \end{array} \right.$

donc $\boxed{\vec{AF} = 2\vec{AB} + \vec{AC}}$ Vu que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires (cf. ②), $(\vec{AB}; \vec{AC})$ est une base du pla (ABC). Comme $\vec{AF}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, il en résulte que les quatre points A, B, C et F sont COPLANAIRES (i.e. $\boxed{F \in (ABC)}$).

⑥ Par simple lecture sur la R-P de $\mathcal{D}$ on peut dire que: $\mathcal{D}$ passe par $P(2; 3; 1)$ et $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Autre caractérisation: $\mathcal{D}$ est la droite passant par $P(2; 3; 1)$ et $Z(5; 0; 7)$ $\left\{ \begin{array}{l} \vec{w} \text{ de la R-P.} \\ \lambda = 3 \text{ de la R-P.} \end{array} \right.$

⑦ On cherche s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que: $\begin{cases} 0,4 = 2 + \lambda \\ 2,5 = 3 - \lambda \\ 1 = 1 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0,4 - 2 = -1,6 \\ \lambda = 3 - 2,5 = 0,5 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{système incompatible!} \end{array} \right.$

donc $\boxed{W(0,4; 2,5; 1) \notin (\mathcal{D})}$

de même, existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que: $\begin{cases} -9 = 2 + \lambda \\ 14 = 3 - \lambda \\ -21 = 1 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -9 - 2 = -11 \\ \lambda = 3 - 14 = -11 \\ \lambda = \frac{-21-1}{2} = -11 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{système compatible!} \end{array} \right.$ $\boxed{L(-9; 14; -21) \in \mathcal{D}}$

Exercice II

53 a) $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ définit le plan (ABC) . Or K est un point de (CD) , donc est dans le plan (ABC) : il existe donc deux réels x, y tels que $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CA} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

donc $x = \frac{1}{5}$ et $y = 1$.

100 1. a) $\overrightarrow{AB}\left(-3; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C définissent un plan.

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan.

2. $\overrightarrow{EF}\left(-1; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

On remarque que $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires. Par conséquent la droite (EF) est parallèle au plan (ABC) .

49 a) $\vec{u}(-1; 2; 1)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{u}'(1; -1; -2)$ est un vecteur directeur de d' .

b) Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas proportionnelles donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Les droites d et d' peuvent être sécantes ou non coplanaires.

c) On résout le système :

$$\begin{cases} 1 - t = 2 + t' \\ 2 + 2t = -2 - t' \\ -1 + t = -2t' \end{cases} \text{ qui est équivalent à } \begin{cases} t + t' = -1 \\ 2t + t' = -4 \\ t + 2t' = 1 \end{cases} \text{ ainsi } \begin{cases} t' = 2 \\ t = -3 \end{cases}$$

On remplace t dans la représentation paramétrique de d et on obtient :

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -4 \\ z = -4 \end{cases}$$

Le point d'intersection de d et d' a pour coordonnées $(4; -4; -4)$.

53 $\vec{u}(3;1;-1)$ est un vecteur directeur de d .

$\vec{u}'(1;1;-1)$ est un vecteur directeur de d' .

Or $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires donc d et d' ne sont pas parallèles.

On résout le système :

$$\begin{cases} 3t = 1 + t' \\ -1 + t = t' \\ 2 - t = 3 - t' \end{cases} \quad \text{qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} 3t - t' = 1 \\ t - t' = 1 \\ t - t' = -1 \end{cases}$$

Ce qui est impossible.

Ainsi, d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes donc elles sont non coplanaires.

Exercice III

- 1) Réponse **C**.
- 2) Réponse **D**.
- 3) Réponse **A**.
- 4) Réponse **B**.

Justifications :

1) Méthode système D : Les coordonnées de A et B doivent vérifier les équations de la R-P solution :

Ce n'est pas la réponse A, A est le point de paramètre $t=0$ de cette R-P, par contre pour B(0; 2; 5) :

$$\begin{cases} 0 = 2 + 2t \\ 2 = -2 + 4t \\ 5 = 7 - 2t \end{cases} \text{ conduisant à : } t = -1 \text{ et } 2 = -6, \text{ donc système}$$

incompatible : B n'appartient pas à cette droite.

En procédant de façon similaire, A et B appartiennent à la R-P de la réponse C.

Méthode bis $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige (AB), donc $\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (AB), donc

une R-P de (AB) qui passe par B(0; 2; 5) est : $\begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 5 + t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

Prenons $t = 1 + t'$ c'est à dire $t' = t - 1$:

Une R-P de (AB) est : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 5 + t - 1 = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} = \text{réponse } \underline{\text{C}}.$

Méthode tern (Sans doute celle que vous cherchez ?)

La méthode bis nécessite un peu d'expérience - Il est normal de ne pas y penser.

On procède à partir de la R-P trouvée de (AB) à la méthode précédente :

(AB) admet pour R-P : $\begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 5 + t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

Les R-P données en réponses B, C, D ont des vecteurs directeurs colinéaires ou égale à $\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{AB}$ et celle de la réponse A n'est pas colinéaire à $\vec{u}$: on exclut A.

Le plus simple ensuite est de regarder si B(0; 2; 5) appartient ou pas aux droites dont une R-P est donnée en réponse B, C, D.

Cela rejoint la méthode système D ! Par exemple (calcul mental), réponse D est à

exclure car sinon, au vu de son abscisse, B serait le point de paramètre $t=0$ de la

réponse D, sauf que si $t=0$: $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases}$. Or $z_B = 5$ et $5 \neq 4$.

Aucune réponse D exclue.

On arrive à penser à : réponse C exacte.

$$② \vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{x_{AB}}{x_{AC}} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ et $\frac{y_{AB}}{y_{AC}} = \frac{4}{2} = 2$. Or $\frac{2}{3} \neq 2$, donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ n'ont pas les coordonnées proportionnelles, donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et A, B, C non alignés.

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{DC} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $\vec{AB} \neq \vec{DC}$, donc ABCD n'est pas un parallélogramme.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AD} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} : \frac{x_{AD}}{x_{AB}} = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ et } \frac{y_{AD}}{y_{AB}} = \frac{8}{4} = 2$$

$2 \neq -1$, donc $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ non colinéaires, donc A, B, D ne sont pas alignés : ils forment donc un unique plan : Réponse D

$$3) K \text{ est le milieu de } [AB], \text{ donc } K \left(\frac{2+0}{2}; \frac{-2+2}{2}; \frac{3+5}{2} \right), K(1; 0; 4)$$

(d) est dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc le R-P de d qui passe par K est :

$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = t' \\ z = 4 + t' \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Or le R-P de } \Delta \text{ est : } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}, \text{ donc } (\Delta) \text{ est dirigé par } \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Clairément $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (ne se réduisent pas), donc (d) et (Δ) ne sont pas parallèles.

Étudions leur intersection : $M(x, y, z) \in (d) \cap (\Delta)$ équivaut à chercher s'il existe des

$$\text{réels } t \text{ et } t' \text{ tels que : } \begin{cases} x = 1 - 2t = 1 + t' \\ y = 3 + 3t = t' \\ z = 4 + t = 4 + t' \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} t' = -2t \\ t' = 3 + 3t \\ t = t' \end{cases}$$

$$\text{Ce qui conduit à : } \begin{cases} t' = t' \\ t = -2t \\ t = 3 + 3t \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} t' = t \\ 3t = 0 \\ 2t = -3 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} t' = t \\ t = 0 \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Système} \\ \text{incohérent} \\ 0 \neq -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Ainsi (d) et (Δ) n'ont aucun point en commun, et comme (d) et (Δ) ne sont pas parallèles, il en résulte que ces deux droites sont non coplanaires : réponse A.

$$4) \text{ l'eq (R-S) de } (A) \text{ est : } \begin{cases} x=1-2t \\ y=3+3t \\ z=4+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Pour qui sait compter mentalement, $F(7; -6; 1)$ est le point de paramètre $t = -3$ de (A) .
alors réponse B.

Si on par élimination: $E(-3; 9; 5) \in (A)$ équivaut à: $\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} -3=1-2t \\ 9=3+3t \\ 5=4+t \end{cases}$, donc $\begin{cases} t=2 \\ t=2 \\ t=1 \end{cases}$
 donc $\square \neq (A) \dots$

Exercice IV

-Un cube a 8 sommets, 6 faces et 12 arêtes.

-Un cube a 4 diagonales : il y a $\binom{8}{2} = 28$ segments reliant deux sommets quelconques du cube.

On exclut les 12 arêtes qui ne sont pas des diagonales du cube, ainsi que 2×6 diagonales des faces des 6 carrés (un carré a deux diagonales) constituant les faces du cube. Donc $28 - 12 - 12 = 4$ diagonales dans un cube.

-Il y a 8 triangles équilatéraux en tout. Chacun des triangles équilatéraux a pour longueur de côté la diagonale d'un carré : il y a 2 diagonales de carrés par faces : il y a donc la moitié de 2×8 c'est-à-dire 8 triangles équilatéraux

-On choisit un sommet : 8 possibles. Pour chacun des sommets, il y a $3! = 6$ repères orthonormés s'appuyant sur les axes (permutation des 3 axes). Par principe multiplicatif, il y a $8 \times 6 = 48$ repères orthonormés ayant pour centre un des sommets du cube et dont les axes sont portés par des arêtes du cube, avec les extrémités des vecteurs unitaires portant les axes comme sommets du cube.

Si on ne tient pas compte de ce dernier point, on a $48 \times 8 = 384$ tels repères (2 orientations par axe).

Exercice V

Affirmation 1 :

$$\begin{cases} 2 = 4 + 2t \\ 1 = -3 - 4t \\ -4 = 5 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 2t \\ 4 = -4t \\ -9 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = t \\ -1 = t \\ -9 = t \end{cases} \text{ ce système n'admet aucune solution donc } A \notin d_1.$$

L'affirmation 1 est donc fausse.

Affirmation 2 :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6-2 \\ -5-1 \\ 4-(-4) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}. \text{ Soit } \vec{u} \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ -20 \end{pmatrix}. \text{ On a } \vec{u} = -2,5 \overrightarrow{AB} \text{ donc } \vec{u} \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (AB).$$

$$\text{Soit } M(10; -11; 12). \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 10-2 \\ -11-1 \\ 12-(-4) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \overrightarrow{AM} = 2 \overrightarrow{AB} \text{ donc } M \text{ appartient à } (AB).$$

La droite (AB) passe par le point M(10; -11; 12) et a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x = 10 - 10t \\ y = -11 + 15t \\ z = 12 - 20t \end{cases}$

où $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (AB).

L'affirmation 2 est donc vraie.

Affirmation 3 :

Soient $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d_1 et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d_2 . Les coordonnées de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas proportionnelles donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires donc d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

Soit (E) le système $\begin{cases} 4 + 2t = 7 + t' \\ -3 - 4t = 2 + 3t' \\ 5 + t = -6 + t' \end{cases}$

$$\begin{cases} 4 + 2t = 7 + t' \\ 5 + t = -6 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 2t = t' \\ 5 + t = -6 + (-3 + 2t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 2t = t' \\ 5 = -9 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 2 \times 14 = t' \\ 14 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 = t' \\ 14 = t \end{cases}$$

Or pour $\begin{cases} 25 = t' \\ 14 = t \end{cases} \quad -3 - 4t = -3 - 4 \times 14 = -59 \text{ et } 2 + 3t' = 2 + 3 \times 25 = 77$

Donc le système (E) n'admet aucune solution donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

L'affirmation 3 est donc fausse.

Affirmation 4 :

$$\overrightarrow{GM} = 2\overrightarrow{GD} + 4\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF}$$

$$\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{GD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{GD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GE}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF}) = \overrightarrow{GD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DG} + \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$$

Donc $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$ Ainsi, $\overrightarrow{GM} = 8\overrightarrow{GN}$ donc, $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{GN}$ sont colinéaires, donc G, M et N sont alignés.

L'affirmation 4 est donc vraie.

Exercice VI

1. a. Résolvons, dans $[0 ; 1]$, l'équation demandée :

$$\begin{aligned}
 f(x) = x &\iff 2xe^{-x} = x \\
 &\iff 2xe^{-x} - x = 0 \\
 &\iff x(2e^{-x} - 1) = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2e^{-x} - 1 = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2e^{-x} = 1 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad e^{-x} = \frac{1}{2} \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2)
 \end{aligned}$$

Or, 0 et $\ln(2)$ sont deux réels dans $[0 ; 1]$ (en effet, la stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ donne : $1 < 2 < e \implies 0 < \ln(2) < 1$).

L'équation a donc deux solutions dans $[0 ; 1]$: 0 et $\ln(2)$.

- b. f est dérivable sur $[0 ; 1]$, en tant que composée et produit de fonctions qui pourraient être définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in [0 ; 1], \quad f'(x) = 2 \times e^{-x} + (2x) \times (-e^{-x}) = (2 - 2x)e^{-x} = 2(1 - x)e^{-x}.$$

On arrive donc à l'expression demandée.

- c. On sait que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$. On a : $f(0) = 2 \times 0e^{-0} = 0$ et $f(1) = 2 \times 1e^{-1} = 2e^{-1}$.

On peut donc établir le tableau de variations de la fonction :

x	0	1
signe de 2	+	
signe de $(1 - x)$	+	0
signe de e^{-x}	+	
signe de $f'(x)$	+	0
variations de f	0	$2e^{-1}$

2. a. *Initialisation* : Calculons u_1 . $u_1 = f(u_0) = f(0, 1) = 2 \times 0,1e^{-0,1} \approx 0,18$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $0 \leq u_0 < u_1 \leq 1$.

Hérédité : Pour un entier naturel k donné, on suppose que l'inégalité $0 \leq u_k < u_{k+1} \leq 1$ est vraie.

Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$$0 \leq u_k < u_{k+1} \leq 1 \implies f(0) \leq f(u_k) < f(u_{k+1}) \leq f(1)$$

car f est strictement croissante sur $[0; 1]$

$$\implies 0 \leq u_{k+1} < u_{k+2} \leq 2e^{-1}$$

car f est la fonction de récurrence de la suite (u_n)

$$\implies 0 \leq u_{k+1} < u_{k+2} \leq 1$$

car $2e^{-1} \approx 0,74 < 1$

Ainsi, la véracité de l'inégalité est héréditaire.

Conclusion : L'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire pour tout entier naturel, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1.$$

b. On a notamment :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1$. La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est donc convergente, vers une limite ℓ vérifiant $0 \leq \ell \leq 1$.

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $[0; 1]$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0; 1]$.

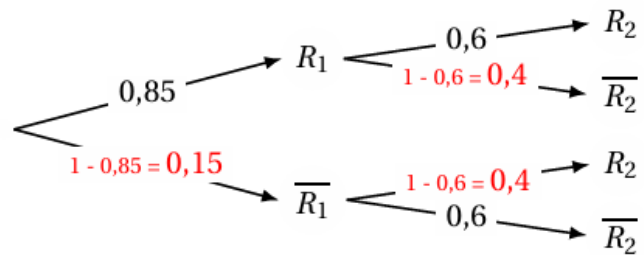
D'après la question 1. a., cette équation n'a que deux solutions dans $[0; 1]$: 0 et $\ln(2)$, or la suite est (strictement) croissante, donc minorée par son premier terme : $u_0 = 0,1$, donc la limite ne saurait être inférieure à 0,1 : la possibilité d'avoir $\ell = 0$ est donc écartée, et finalement, l'unique valeur possible pour ℓ est donc $\ln(2)$.

La suite (u_n) converge donc vers $\ln(2)$.

Exercice VII

Partie A

1. La situation peut être représentée par l'arbre pondéré ci-contre :



2. Les événements R_1 et $\overline{R_1}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$P(R_2) = P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap \overline{R_1}) = 0,85 \times 0,6 + 0,15 \times 0,4 = 0,57.$$

Ceci confirme que la probabilité de l'événement R_2 est égale à 0,57.

3. Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, la probabilité qu'il ait raté le premier est la probabilité conditionnelle : $P_{R_2}(\overline{R_1})$.

$$\text{D'après la définition : } P_{R_2}(\overline{R_1}) = \frac{P(R_2 \cap \overline{R_1})}{P(R_2)} = \frac{0,15 \times 0,4}{0,57} = \frac{0,06}{0,57} = \frac{6}{57} = \frac{2}{19}.$$

(puisque'il n'y a pas de consigne d'arrondi dans l'énoncé, *a priori*, c'est la valeur exacte, fractionnaire, qui est attendue).

4. a. Voici le tableau donnant la loi de probabilité de Z .

z_i	0	1	2
événement	$\overline{R_1} \cap \overline{R_2}$	$(\overline{R_1} \cap R_2) \cup (R_1 \cap \overline{R_2})$	$R_1 \cap R_2$
$P(Z = z_i)$	$0,15 \times 0,6 = 0,09$	$0,15 \times 0,4 + 0,85 \times 0,4 = 0,06 + 0,34 = 0,4$	$0,85 \times 0,6 = 0,51$

- b. L'espérance mathématique $E(Z)$ est donc :

$$E(Z) = 0,09 \times 0 + 0,4 \times 1 + 0,51 \times 2 = 1,42.$$

Ce résultat, dans le contexte de l'exercice, signifie que, dans ces conditions, le nombre moyen de services réussis sur les deux premiers services de la séance d'entraînement est de 1,42.

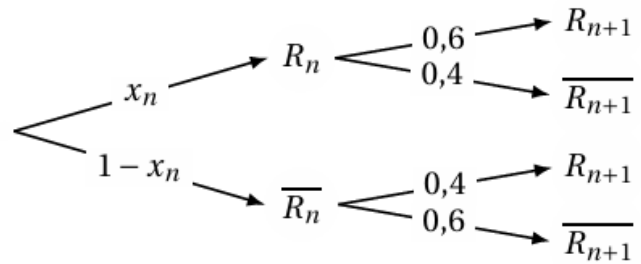
(Ici, le nombre 1,42 n'a pas à être arrondi à l'entier, car il ne représente pas un nombre réel ou réaliste de services réussis, mais une *moyenne* théorique, établie sur les deux premiers services d'un grand nombre d'entraînements réalisés dans les mêmes conditions).

Partie B

1. a. D'après l'énoncé, on a les probabilités conditionnelles suivantes :

- $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0,6$: c'est la situation « si le joueur réussit un service (ici, le service n) alors la probabilité qu'il réussisse le suivant (ici, le service $(n+1)$) est égale à 0,6 ».
- $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}}) = 0,6$. Là, c'est la situation « si le joueur ne réussit pas un service (ici, le service n) alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant (ici, le service $(n+1)$) est égale à 0,6 ».

- b. On peut visualiser la situation par l'arbre pondéré ci-contre :



R_n et $\overline{R_n}$ partitionnant l'univers, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P(R_{n+1}) \\ &= P(R_{n+1} \cap R_n) + P(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) \\ &= x_n \times 0,6 + (1 - x_n) \times 0,4 \\ &= 0,6x_n + 0,4 - 0,4x_n \\ &= 0,2x_n + 0,4. \end{aligned}$$

On a bien établi la relation de récurrence attendue pour la suite (x_n) .

2. a. Puisque l'on a, pour tout entier naturel non nul $u_n = x_n - 0,5$, il est équivalent de dire que l'on a $u_n + 0,5 = x_n$.

Cherchons à établir la relation de récurrence de la suite (u_n) . Soit n un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= x_{n+1} - 0,5 && \text{d'après la définition de la suite } (u_n) \\ &= (0,2x_n + 0,4) - 0,5 && \text{d'après la relation de récurrence de } (x_n) \\ & && \text{(voir B 1. b.)} \\ &= 0,2(u_n + 0,5) + 0,4 - 0,5 && \text{d'après la définition de la suite } (u_n) \\ &= 0,2u_n + 0,2 \times 0,5 - 0,1 && \\ & && \text{(voir B 1. b.)} \\ &= 0,2(u_n + 0,5) + 0,4 - 0,5 && \text{d'après la définition de la suite } (u_n) \\ &= 0,2u_n + 0,2 \times 0,5 - 0,1 \\ &= 0,2u_n + 0,1 - 0,1 \\ &= 0,2u_n \end{aligned}$$

Cette relation de récurrence est celle d'une suite géométrique, de raison $q = 0,2$ et de premier terme $u_1 = x_1 - 0,5 = 0,85 - 0,5 = 0,35$.

- b. Puisque l'on sait que (u_n) est géométrique, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,35 \times 0,2^{n-1}.$$

Et comme, pour tout n naturel non nul $u_n + 0,5 = x_n$: $x_n = 0,5 + 0,35 \times 0,2^{n-1}$

Comme on a $0 < 0,2 < 1$, on en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$,

et donc, par limite de la somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0,5$.

- c. Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'au bout d'un grand nombre de services, la probabilité de réussir un service tend à se stabiliser aux alentours de 0,5, ou bien encore qu'au bout d'un grand nombre de services, le joueur aura tendance à réussir un service sur 2.